

**UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE**

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Bakalářská práce

**Různé přístupy k zjišťování obsahu trojúhelníku**

Different approaches to triangle area calculation

Barbora Müllerová

Vedoucí práce: Mgr. Veronika Tůmová, Ph.D.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Anglický jazyk se zaměřením na vzdělávání -  
Matematika se zaměřením na vzdělávání

2018

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Různé přístupy k zjišťování obsahu trojúhelníku potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha, 20. dubna 2018

## **Poděkování**

Ráda bych poděkovala vedoucí své bakalářské práce, Mgr. Veronice Tůmové, Ph.D., za její cenné rady, důležité připomínky, ochotu a čas, které mi během zpracování této práce věnovala. Dále děkuji své rodině, Bohu, Lucii Cisarikové a Šárce Kletečkové za podporu při psaní této práce.

# ABSTRAKT

Tato práce se zabývá problematikou určování obsahu trojúhelníku. Popisuje nejen základní prvky v trojúhelníku a jejich vlastnosti, ale také další matematické pojmy, jakkoli spjaté s výpočtem obsahu trojúhelníku. Dále se zabývá historickým vývojem geometrie se zaměřením na trojúhelníky a obsahuje základní informace o významných matematicích od pravěku po současnost. V práci jsou dále popsány a následně aplikovány více i méně tradiční postupy pro určení obsahu trojúhelníku. Práce je doplněna obrázky, vytvořené v programu GeoGebra, které pomáhají v pochopení jednotlivých pojmů.

## KLÍČOVÁ SLOVA

trojúhelník, obsah, historie, aplikace, metoda

# **ABSTRACT**

The aim of this thesis is to deal with the problematics of triangle area calculation. It depicts not only basic elements in triangles and their features, but also other mathematical terms, that are connected to triangle area calculation. Furthermore, it deals with the historical development of geometry, with a special focus on triangles, and contains basic information about important mathematicians throughout the ages. There are also described and applied both more and less traditional approaches to triangle area calculation. The thesis is completed with pictures made in GeoGebra, which help to understand individual terms.

# **KEY WORDS**

triangle, area, history, application, method

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Definice matematických pojmů</b>	<b>9</b>
2.1	Definice trojúhelníku . . . . .	9
2.2	Názvosloví prvků v trojúhelníku . . . . .	10
2.2.1	Vrcholy . . . . .	10
2.2.2	Strany trojúhelníku . . . . .	10
2.2.3	Vnitřní úhly trojúhelníku . . . . .	10
2.2.4	Výška trojúhelníku . . . . .	10
2.2.5	Střední příčky trojúhelníku . . . . .	10
2.2.6	Kružnice opsaná trojúhelníku . . . . .	11
2.2.7	Kružnice vepsaná trojúhelníku . . . . .	11
2.2.8	Pythagorova věta . . . . .	11
2.3	Další důležité matematické pojmy . . . . .	12
2.3.1	Obsah rovinného útvaru . . . . .	12
2.3.2	Kartézská soustava souřadnic . . . . .	12
2.3.3	Práce s vektory . . . . .	13
2.3.4	Čtvercová síť . . . . .	15
2.3.5	Určitý integrál . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Vývoj určování obsahu trojúhelníku, významní matematici</b>	<b>18</b>
3.1	Od pravěku po starověk . . . . .	18
3.2	Egyptští stavitelé a zemědělci . . . . .	18
3.3	Antické Řecko . . . . .	19
3.3.1	Tháles z Milétu . . . . .	19
3.3.2	Pythagoras ze Samu . . . . .	19
3.3.3	Eudoxos z Knidu . . . . .	20
3.3.4	Eukleidés . . . . .	20
3.3.5	Archimédes . . . . .	22
3.3.6	Heron Alexandrijský . . . . .	23
3.4	Čínská matematika . . . . .	23
3.5	Tradice matematiky v Indii . . . . .	24
3.6	Matematika arabských států . . . . .	25
3.7	Moderní přístupy v matematice . . . . .	26
3.7.1	René Descartés . . . . .	26
3.7.2	Pierre de Fermat . . . . .	26
3.7.3	Gottfried Wilhelm Leibniz . . . . .	26
3.7.4	Simon Antoine Jean L'Huilier . . . . .	26

3.7.5	Bernhard Riemann . . . . .	27
3.7.6	Georg Alexander Pick . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Jednotlivé metody zjišťování obsahu trojúhelníku</b>	<b>28</b>
4.1	Určování počtu čtverců . . . . .	28
4.2	Metoda rozřezávání . . . . .	29
4.3	Metoda rámování . . . . .	30
4.4	Pickova formule . . . . .	31
4.5	Základní vzorec - použití strany a výšky . . . . .	36
4.6	Využití goniometrické funkce sinus . . . . .	37
4.7	Heronův vzorec . . . . .	38
4.8	Výpočet pomocí poloměru kružnice opsané . . . . .	39
4.9	Výpočet pomocí poloměru kružnice vepsané . . . . .	40
4.10	L'Huillierovy vzorce . . . . .	41
4.11	Výpočet pomocí souřadnic vrcholů . . . . .	43
4.12	Výpočet pomocí vektorového součinu . . . . .	45
4.13	Užití určitého integrálu . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Aplikace metod</b>	<b>47</b>
5.1	Metoda rozřezávání a určování počtu čtverců . . . . .	47
5.2	Metoda rámování . . . . .	48
5.3	Pickova formule . . . . .	49
5.4	Základní vzorec - použití strany a výšky . . . . .	49
5.5	Využití goniometrické funkce sinus . . . . .	50
5.6	Heronův vzorec . . . . .	50
5.7	Výpočet pomocí poloměru kružnice opsané . . . . .	51
5.8	Výpočet pomocí poloměru kružnice vepsané . . . . .	51
5.9	L'Huillierovy vzorce . . . . .	52
5.10	Výpočet pomocí souřadnic vrcholů . . . . .	53
5.11	Výpočet pomocí vektorového součinu . . . . .	54
5.12	Užití určitého integrálu . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>57</b>
	<b>Použité informační zdroje</b>	<b>58</b>
	<b>Seznam obrázků</b>	<b>64</b>
	<b>Seznam tabulek</b>	<b>65</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Tato práce si klade za cíl zachytit problematiku výpočtu obsahu trojúhelníku z více úhlů pohledu. Většina učebnicových řad tuto problematiku redukuje na výpočet obsahu pomocí strany a výšky, čímž se ochuzuje o široké spektrum dalších postupů. V této práci proto chci podat ucelený vhled do této problematiky a obrátit tak pozornost i k méně známým přístupům.

V první části jsou rozebrány důležité matematické pojmy, se kterými se setkáme v průběhu celé práce a které jsou pro její pochopení důležité. Druhá část je zaměřena na historii matematické vědy se speciálním důrazem na geometrii, problematiku trojúhelníku a jeho obsahu. Navazuje kapitola popisující jednotlivé metody určování obsahu trojúhelníku. U každé z nich dále ukážu její použitelnost a nároky na úroveň žáka ve výuce matematiky. V páté kapitole pak jednotlivé metody aplikuji na jednom zvoleném trojúhelníku  $ABC$ . V průběhu práce budu pozorovat vztahy mezi jednotlivými metodami i jednotlivými elementy v trojúhelníku, které se objeví během výpočtů.

Během zpracovávání tohoto tématu jsem nahlédla do několika řad učebnic pro výuku matematiky na základních i středních školách, pracovala jsem též s vysokoškolskými skripty. V práci se objevují definice a některé postupy z jednotlivých učebnic. Nabízí se spolu s problematikou výpočtu obsahu trojúhelníku důkladně prozkoumat a porovnat, jak se k tématu obsahu trojúhelníků staví jednotlivé učebnice matematiky, akreditované MŠMT. Analýzu učebnic s důrazem na problematiku obsahu a obvodu trojúhelníku a rovnoběžníku však již provedl Pavel Sovič ve své diplomové práci ([46]), která je zaměřena více didakticky. Autor zde uvádí konkrétní příklady úloh z vybraných učebnic a dále také prezentuje výsledky svého výzkumu, kdy žákům několika tříd zadal stejné úlohy a pozoroval, jak která z nich s úlohami pracuje a jaké pro jednotlivé výpočty používá metody. Moje práce se proto více zaměřuje na historický kontext výpočtů obsahu a teoretický základ jednotlivých metod.



# Kapitola 2

## Definice matematických pojmů

### 2.1 Definice trojúhelníku

Trojúhelník lze definovat mnoha různými způsoby. Zde jsou některé definice trojúhelníku vybrané z různých knižních i internetových zdrojů.

„Trojúhelník (trojhraník, triangulum), jest plocha třemi stranami obmezená“ ([49], s. 225).

„Mějme dány tři různé body  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , které neleží v jedné přímce. Množina bodů, které leží současně v polorovinách  $ABC$ ,  $BCA$ ,  $CAB$ , se nazývá trojúhelník  $ABC$ “ ([37], s. 356).

„Trojúhelníkem je útvar třemi, čtyřúhelníkem čtyřmi a mnohoúhelníkem více než čtyřmi úsečkami (neboli stranami) omezený“ ([14], s. 42).

„Trojúhelník je rovinný geometrický útvar, mnohoúhelník se třemi vrcholy a třemi stranami“ ([48]).

„Trojúhelník je geometrický útvar, který je tvořen třemi vrcholy, které jsou spojeny třemi úsečkami“ ([50]).

Jak můžeme vidět, jednotlivé definice trojúhelníku se velice liší. Někteří autoři postupují přes průnik tří polorovin, někteří jej popisují jako speciální případ geometrického útvaru, více z nich pak definuje trojúhelník jako plochu uvnitř dané hranice. Nutno podotknout, že některé z definic jsou zavádějící a nepřesné. Například poslední z výše uvedených popisuje trojúhelník jen jako hranici, tzn. ony tři vrcholy a úsečky je spojující, a nikoli plochu touto hranicí omezenou. Tato záměna se u žáků i u některých studentů vyskytuje poměrně často. Uvedení této nepřesné definice na oblíbených webových stránkách ještě dopomáhá šíření této miskoncepce. Další nedokonalostí ve výše uvedených definicích je tvrzení předposlední, kdy je trojúhelník definován jako mnohoúhelník s určitými specifikacemi. Na uvedené webové stránce však již není definován mnohoúhelník jako takový, a tím pádem by neměl být v definici dalšího útvaru použit.

## 2.2 Názvosloví prvků v trojúhelníku

Jednotlivé elementy trojúhelníku nesou svůj název. Některé z nich jsou specifické pouze pro trojúhelníky, jiné mají obdobný význam i pro další geometrické útvary. Toto názvosloví je důležité zejména pro dialog mezi různými matematiky od starého Egypta po moderní vědce. Uvedme si tedy nejdůležitější názvy týkající se trojúhelníku a některé jejich základní vlastnosti, které budou v práci dále využity.

### 2.2.1 Vrcholy

Pojmem vrchol trojúhelníku označujeme bod, který je průsečíkem dvou přímk ohraničujících plochu trojúhelníku. Jsou označovány velkými tiskacími písmeny a pomocí nich také trojúhelníky nazýváme. Tato písmena označující vrcholy umísťujeme v abecedním pořádku, a to proti směru hodinových ručiček. V textovém zápisu používáme pro označení trojúhelníku značku  $\triangle$ , např.  $\triangle ABC$  ([32], s. 33).

### 2.2.2 Strany trojúhelníku

Stranami trojúhelníku rozumíme úsečky, jichž krajními body jsou vrcholy trojúhelníku. V každém trojúhelníku  $ABC$  najdeme tři strany,  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$ . Pro snazší zápis různých výpočtů se zavádí též značení stran malými tiskacími písmeny. Každá strana nese jméno podle protějšího vrcholu. Proti vrcholu  $A$  máme stranu  $a$ , proti vrcholu  $B$  je strana  $b$  a proti vrcholu  $C$  je strana  $c$  ([50]).

### 2.2.3 Vnitřní úhly trojúhelníku

Pojem vnitřní úhel označuje úhel svíraný dvěma stranami trojúhelníku. V  $\triangle ABC$  se jedná o úhly  $CAB$ ,  $BCA$ ,  $ABC$ . Pro snazší zápis používáme pro označení úhlů v trojúhelníku řecká písmena:  $\alpha = \angle CAB$ ,  $\beta = \angle ABC$ ,  $\gamma = \angle BCA$  ([22], s. 9). Pro vnitřní úhly v trojúhelníku dále platí, že součet všech úhlů je  $180^\circ$ , tedy  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  ([7], s. 28).

### 2.2.4 Výška trojúhelníku

V učebnici matematiky pro sekundu víceletého gymnázia je výška definována takto:

Výškou trojúhelníku rozumíme úsečku (či délku této úsečky), která spojuje vrchol trojúhelníku s patou kolmice vedené z tohoto vrcholu k přímce, na které leží protější strana. Každý trojúhelník má tři výšky. Přímk, na kterých tyto výšky leží, se protínají v jediném bodě. Nazýváme ho průsečíkem výšek. ([22], s. 50)

Tomuto průsečíku říkáme ortocentrum. Výšku značíme písmenem  $v$  a dolním indexem specifikujeme, kterým bodem a ke které straně je výška zkonstruována, tedy  $v_a$  pro výšku vedenou bodem  $A$ ,  $v_b$  pro výšku vedenou bodem  $B$  a  $v_c$  pro výšku vedenou bodem  $C$ .

### 2.2.5 Střední příčky trojúhelníku

„Úsečka, jejímiž krajními body jsou středy dvou stran trojúhelníka, se nazývá střední příčka trojúhelníku“ ([37], s. 358). Každá střední příčka je rovnoběžná se stranou, jejímž

středem neprochází, a velikost této příčky je poloviční vzhledem k velikosti této strany ([8], s. 24). Střední příčky rozdělí trojúhelník na 4 shodné trojúhelníky.

### 2.2.6 Kružnice opsaná trojúhelníku

Kružnice  $k_1$  opsaná  $\triangle ABC$  je taková kružnice, která prochází všemi vrcholy trojúhelníku. Střed  $S$  kružnice opsané je průsečíkem os stran trojúhelníku ([32], s. 48). Poloměr kružnice opsané se značí  $r$ . Velikost  $r$  je rovna vzdálenosti středu  $S$  od libovolného vrcholu trojúhelníku ([22], s. 43).

### 2.2.7 Kružnice vepsaná trojúhelníku

„Říkáme, že kružnice  $k_2$  se dotýká každé strany trojúhelníku. Taková kružnice se nazývá vepsaná trojúhelníku  $ABC$ “ ([22], s. 46). Střed  $O$  takové kružnice leží na průsečíku os vnitřních úhlů trojúhelníku. Poloměr kružnice vepsané značíme řeckým písmenem  $\rho$  ([8], s. 36) a je roven vzdálenosti středu  $O$  od libovolné strany trojúhelníku.

### 2.2.8 Pythagorova věta

Pythagorova věta popisuje vztah mezi stranami pravoúhlého trojúhelníku, uvedeme si její znění v knize Přehled středoškolské matematiky od Josefa Poláka ([37], s. 362):

**V.16. Pythagorova věta.** Jsou-li  $a$ ,  $b$  velikosti odvěsen,  $c$  velikost přepony pravoúhlého trojúhelníka, platí

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Kromě tohoto znění Pythagorovy věty se velice často používá její obrácení. To lze zavést takto:

**Obrácení Pythagorovy věty:** Platí-li pro velikosti stran trojúhelníka vztah  $a^2 + b^2 = c^2$ , je tento trojúhelník pravoúhlý a  $c$  je velikost jeho přepony. ([37], s. 362)

V podobě dvou implikací je Pythagorova věta uvedena i v učebnici matematiky Fraus pro 8. ročník ([9], s. 14) nebo v učebnici Základní poznatky z matematiky, určené pro gymnázia ([11], s. 41). Nutno dodat, že Pythagorova věta obecně platí jako ekvivalence. Upozorňuje na to například Jindřich Bečvář v jednom ze svých článků pro časopis Učitel matematiky ([5], s. 165). V rámci textu říká a později dokazuje, že: „Pythagorova věta, obrácená Pythagorova věta a tedy i pythagorejská ekvivalence jsou navzájem ekvivalentní tvrzení.“

Dalším důležitým označením spjatým s Pythagorovou větou jsou tzv. **pythagorejské trojice**. Nazýváme tak trojice přirozených čísel, pro něž platí vztah Pythagorovy věty, a tedy které jsou stranami pravoúhlého trojúhelníku ([9], s. 14). Trojice jsou uspořádané, „v pythagorejském trojúhelníku  $(x, y, z)$  odpovídají  $x$  a  $y$  délkám odvěsen a  $z$  délce přepony“ ([45], s. 12). Jsou jimi například trojice čísel  $(3, 4, 5)$ ,  $(6, 8, 10)$  nebo  $(8, 15, 17)$ .

## 2.3 Další důležité matematické pojmy

Pro práci s obsahem trojúhelníku se nepoužívají pouze základní pojmy z části 2.2, ale pracuje se s mnoha dalšími, platnými obecně a vyplývajícími z různých oblastí studia matematiky. Níže uvádím ty matematické pojmy, které v dalších částech práce rovněž využívám.

### 2.3.1 Obsah rovinného útvaru

Pojem obsah označuje, „kolik místa“ v rovině zaujímá daný geometrický útvar“ ([22], s. 97). Obsah značíme písmenem  $S$  a jeho základní jednotkou je  $1\text{ m}^2$ , který značí obsah čtverce o straně  $1\text{ m}$  ([21], s. 10).

Tato definice je spíše intuitivní, pojem obsahu lze však definovat i více formálně, a to zavedením míry geometrického útvaru. Matematik Josef Polák ji v jednom ze svých článků definuje takto:

Míra geometrického útvaru je společný název pro délku útvaru na přímce či křivce, pro obsah útvaru v rovině či na ploše, pro objem útvaru v prostoru ([36], s. 321).

Obecně lze pojem míra útvaru zavést následovně ([42], s. 108):

Nechť je dán systém  $M$  útvarů v takovém prostoru  $P$ , kde je definována shodnost útvarů a pojmy vnitřní a hraniční bod útvaru. *Mírou útvarů* ze systému  $M$  nazýváme funkci  $m$ , která má tyto vlastnosti:

- každému útvaru  $X$  přiřazuje číslo  $m(X) \geq 0$ ;
- každým dvěma shodným útvarům  $X, Y$  přiřazuje taková čísla  $m(X), m(Y)$ , že  $m(X) = m(Y)$ ;
- (*Aditivita míry  $m$* ) každým dvěma útvarům  $X, Y$ , které nemají společný vnitřní bod vzhledem k prostoru  $P$ , přiřazuje taková čísla  $m(X), m(Y)$ , že  $m(X \cup Y) = m(X) + m(Y)$ ;
- alespoň jednomu útvaru  $E$  přiřazuje číslo  $m(E) = 1$ .

Tato definice upozorňuje na některé důležité vlastnosti míry, které se při výpočtu běžně užívají. Například vlastnost aditivity, která říká, že míra zůstane zachována i při rozřezání a přeskládání geometrického útvaru, umožňuje použití většiny metod, které jsou v této práci popsány.

Formální a intuitivní definice jsou vzájemně propojeny. Výraz  $m(X)$  může být například obsah trojúhelníku, útvar  $E$  představuje jednotkový čtverec a číslo  $m(E)$  je výrazem pro obsah jednotkového čtverce, tedy například  $m(E) = 1\text{ cm}^2$  pro  $E$  odpovídající jednotkovému čtverci o straně délky  $1\text{ cm}$ .

### 2.3.2 Kartézská soustava souřadnic

Dvojice číselných os  $x, y$  v rovině, pro které platí

- obě osy jsou navzájem kolmé,

- jejich průsečíku  $O$  odpovídá na obou osách číslo 0,

se nazývá kartézská soustava souřadnic v rovině a označuje se  $O_{xy}$ . Bod  $O$  se nazývá počátek kartézské soustavy souřadnic a přímky  $x, y$  se nazývají souřadnicové osy. ([47], s. 9)

Tato definice z učebnice pro střední školy ovšem není úplná. Josef Polák v Přehledu středoškolské matematiky dodává ještě další podmínky, a to:

Obě osy souřadnic zvolíme za číselné osy, tj. orientujeme je tak, že jednu z polopřímek na osách  $x, y$  s počátkem  $O$  prohlásíme za kladnou poloosu a druhou za zápornou poloosu ( $x$ , resp.  $y$ ), a zvolíme pro ně délkové jednotky. Jsou-li délkové jednotky obou os tytéž, mluvíme o kartézské soustavě souřadnic. ([37], s. 525)

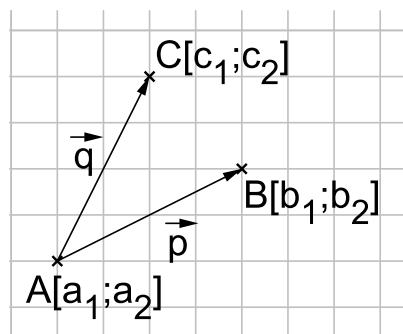
Každý bod umístěný do této soustavy lze zapsat pomocí tzv. souřadnic, které určíme následujícím způsobem. Bodem  $A$  vedeme rovnoběžky s osami  $x$  a  $y$ . Rovnoběžka s osou  $y$  protne osu  $x$  bodě  $X$ , kterému na číselné ose přiřadíme reálné číslo  $a_1$ . Hodnota  $|a_1|$  se rovná vzdálenosti bodu  $X$  od počátku soustavy souřadnic, a to v jednotkách dané soustavy. Číslo  $a_1$  je kladné, resp. záporné, pokud průsečík leží na kladné, resp. záporné, poloose  $x$ . Průsečíku osy  $y$  s rovnoběžkou vedenou bodem  $A$  s osou  $x$  je na číselné ose přiřazeno reálné číslo  $a_2$ . Pro určení jeho hodnoty platí obdobná pravidla jako pro určení hodnoty čísla  $a_1$ . Čísla  $a_1$  a  $a_2$  nazýváme souřadnicemi bodu  $A$ . Souřadnice zapisujeme do hranatých závorek,  $A[a_1, a_2]$ . Dvojice čísel  $a_1$  a  $a_2$  je uspořádaná, prohozením jejich pořadí získám jiné umístění bodu  $A$ . ([47], s. 9-10; [37], s. 525)

Základy kartézské soustavy souřadnic položili francouzský filosof a matematik René Descartés, jak je detailněji popsáno v části 3.7.1, a Pierre de Fermat, jehož přínos matematice je popsán v sekci 3.7.2.

### 2.3.3 Práce s vektory

#### Vektor

V kartézské soustavě souřadnic se kromě bodů pracuje ještě s dalšími prvky, a to vektory. Vektor určuje posunutí, pomocí něj cestujeme z jednoho mřížového bodu do druhého ([47], s. 20).



Obrázek 2.1: Definice vektorů  $\vec{p}$  a  $\vec{q}$  a hledání jejich souřadnic

Například vektor  $\vec{p}$  značí cestu z bodu  $A$  do bodu  $B$  a vektor  $\vec{q}$  cestu z bodu  $A$  do bodu  $C$  (obr. 2.1). Vektory můžeme také značit právě pomocí počátečního a koncového bodu, takže  $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$  a  $\vec{q} = \overrightarrow{AC}$ .

Souřadnice vektoru se určují jako rozdíl souřadnic koncového a počátečního bodu, tedy:

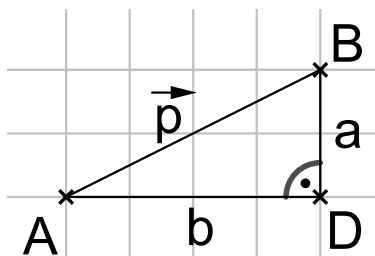
$$\vec{p} = \overrightarrow{AB} = B - A = [b_1, b_2] - [a_1, a_2] = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

$$\vec{q} = \overrightarrow{AC} = C - A = [c_1, c_2] - [a_1, a_2] = (c_1 - a_1, c_2 - a_2).$$

### Velikost vektoru

Velikost vektoru  $\vec{p} = (p_1, p_2)$  je dána předpisem  $|\vec{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$  ([47], s. 25).

Vzorec vychází z toho, že osy souřadnic jsou kolmé a jsou na nich stejné jednotky. Výpočet velikosti vektoru je pak prostým užitím Pythagorovy věty.



Obrázek 2.2: Pythagorova věta pro velikost vektoru

Velikosti obou odvěsen v trojúhelníku  $ADB$  odpovídají souřadnicím zadaného vektoru, označím  $b = p_1$  a  $a = p_2$ . Velikost přepony  $|\vec{p}|$  snadno dopočítám jako:

$$|\vec{p}|^2 = a^2 + b^2$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

### Vektorový součin

Dalším pojmem používaným v této práci je vektorový součin. Výsledkem vektorového součinu dvou vektorů  $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$  a  $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$  je opět vektor, označme jej  $\vec{p} \times \vec{q} = \vec{w}$ . Souřadnice vektoru  $\vec{w}$  vypočítáme jako

$$\vec{w} = (p_2q_3 - p_3q_2, p_3q_1 - p_1q_3, p_1q_2 - p_2q_1). \quad ([52])$$

Tento zápis odpovídá vyjádření vektorového součinu pomocí determinantů, které je uvedeno níže v této části.

Výpočet vektorového součinu platí obecně pro libovolné dva vektory v prostoru. V rovině je však možné ho modifikovat. Pro použití tohoto postupu totiž potřebuji vektory o třech souřadnicích, u bodů v rovině tak položím třetí souřadnici = 0. Součiny obsahující  $p_3$  a  $q_3$  se ve výrazu vynulují, výsledný vektor se bude rovnat  $\vec{w} = (0, 0, p_1q_2 - p_2q_1)$ .

V maticovém zápisu lze vektor  $\vec{w}$  vyjádřit takto:

$$\vec{w} = \vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ q_1 & q_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix},$$

kde vektory  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  a  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  jsou vzájemně kolmé jednotkové vektory tvořící bázi ortonormálního prostoru ([47], s. 74).

### 2.3.4 Čtvercová síť

Práce ve čtvercové síti částečně odpovídá principům práce v kartézské soustavě souřadnic. Je však jednodušší a intuitivnější, díky čemuž může být představena již žákům prvního stupně. Pro její využití je nutné zavést několik pojmů.

#### Čtvercová síť neboli mříž

Čtvercovou síť, jinak také často nazývanou mříž, zavedeme následovně: Vezmeme euklidovskou rovinu a protněme ji postupně dvěma osnovami rovnoběžných přímek, kdy tyto dvě osnovy budou na sebe kolmé. Každé dvě sousední rovnoběžky mají od sebe stejnou vzdálenost. Přímky první osnovy nazveme vodorovné, přímky druhé osnovy svislé. Směr, v němž leží vodorovné přímky, nazveme vodorovným směrem, směr svislých přímek svislým směrem sítě. Kterékoli dvě sousední vodorovné přímky spolu s kterýmikoli dvěma sousedními svislými přímkami tvoří jednotkový čtverec sítě ([19], s. 17).

#### Mřížový bod

Mřížový bod je „každý bod, ve kterém některá svislá přímka sítě protíná některou vodorovnou přímku sítě“ ([19], s. 18).

#### Mřížový mnohoúhelník

Mřížovým nazveme každý „mnohoúhelník, jehož všechny vrcholy jsou mřížové body“ ([19], s. 18). Mřížový trojúhelník, který je speciálním případem mnohoúhelníku, je tedy takový trojúhelník, jehož všechny tři vrcholy jsou mřížovými body.

### 2.3.5 Určitý integrál

Pro lepší pochopení určitého integrálu je nutné zavést nejprve pojem neurčitý integrál.

#### Neurčitý integrál

Pro definování neurčitýho integrálu použijeme Definici 2.1. ze skript Technické univerzity v Ostravě ([23], s. 6):

Nechť funkce  $f(x)$  je definovaná na intervalu  $I$ . Funkce  $F(x)$  se nazývá *primitivní* k funkci  $f(x)$  na  $I$ , jestliže platí  $F'(x) = f(x)$  pro každé  $x \in I$ .

Množina všech primitivních funkcí k funkci  $f(x)$  na  $I$  se nazývá *neurčitý integrál* z funkce  $f(x)$  a značí se  $\int f(x)dx$ . Tedy

$$\int f(x)dx = \{F(x) : F(x) \text{ je primitivní k } f(x) \text{ na } I\}.$$

Jednotlivé funkce  $F(x)$  náležející do této množiny se liší o konstantu.

## Určitý integrál

Určitý integrál pak vychází ze znalosti integrálu neurčitého. Zatímco výsledkem neurčitého integrálu dané funkce je opět funkce (resp. množina funkcí  $F(x)$  lišících se o konstantu), výsledkem určitého integrálu je číslo. Definici Riemannova integrálu můžeme vyslovit následovně:

Nechť  $f(x)$  je funkce, která je definovaná a ohraničená na ohraničeném a uzavřeném intervalu  $\langle a, b \rangle$ ,  $a < b$ .

Řekneme, že funkce  $f(x)$  je *integrovatelná* neboli že má *určitý integrál* na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , jestliže existuje číslo  $I \in \mathbf{R}$  s následující vlastností:

K libovolnému číslu  $\epsilon > 0$  lze nalézt číslo  $\delta > 0$  tak, že pro libovolné dělení  $D$  intervalu  $\langle a, b \rangle$  takové, že  $v(D) < \delta$ , a pro libovolný výběr reprezentantů  $\Xi$  tohoto dělení platí  $|\varphi(f, D, \Xi) - I| < \epsilon$ .

Číslo  $I$  pak nazýváme hodnotou určitého integrálu a píšeme

$$\int_a^b f(x)dx = I.$$

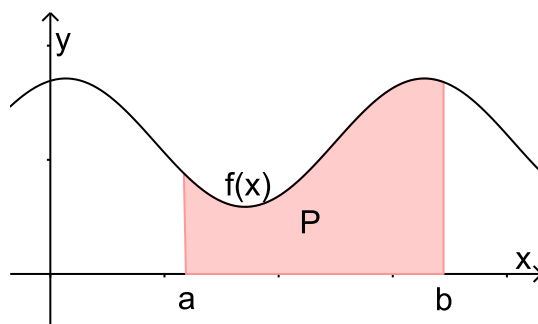
Číslo  $a$  nazýváme *dolní mez*, číslo  $b$  *horní mez*, interval  $\langle a, b \rangle$  *integrační obor* a funkci  $f$  *integrand*. Horní a dolní mez nazýváme společně *integrační meze*. ([23], s. 108)

## Využití určitého integrálu

Více než formální definice určitého integrálu je pro nás důležité jeho praktické využití. Určitý integrál, jehož výsledkem je, jak už jsme si řekli, číslo, odpovídá ploše pod grafem funkce. To stanovuje například věta ([37], s. 450):

Obsah  $P$  základního obrazce určeného uspořádanou trojicí  $[a, b, f(x)]$  je roven určitému integrálu z funkce  $f(x)$  v mezích od  $a$  do  $b$ :

$$P = \int_a^b f(x)dx.$$



Obrázek 2.3: Výpočet pomocí určitého integrálu



Výpočet obsahu  $P$  se provádí na základě Newton-Leibnizovy formule, která říká:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), ([23], \text{ s. 117}).$$

Při běžných výpočtech se pro zjednodušení zápisu často využívá toto označení:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Newton-Leibnizova formule platí na konečném intervalu pouze za určitých předpokladů, z nich jmenujme například spojitost  $f(x)$ .

Při využití Riemannova integrálu je ještě důležité zmínit, jak pracuje s funkcemi, jichž grafy se nacházejí nad i pod osou  $x$ . Riemannův integrál postupuje tak, že plochy pod grafem funkce nad osou  $x$  přičítá a plochy ohraničené osou  $x$  a grafem funkce pod osou  $x$  odečítá. Pro naše potřeby je tedy nutné předpokládat, že všechny vrcholy trojúhelníku mají kladné souřadnice  $y$ , jinými slovy že leží nad osou  $x$ .

## Kapitola 3

# Vývoj určování obsahu trojúhelníku, významní matematici

Vývoj geometrie, a spolu s ním i zkoumání obsahu trojúhelníku, sahá do dávných dob. Zpočátku byl rozvoj matematiky úzce spojen s praktickými dovednostmi. Později se pole zájmu přesunulo do více abstraktních pojmů a výpočtů. Pojďme se nyní podívat, jak se v průběhu staletí matematická věda vyvíjela v různých částech světa.

### 3.1 Od pravěku po starověk

Z doby pravěku se nedochovaly žádné přímé důkazy o výpočtech obsahů či vzdáleností. Dokud pravěcí lidé žili kočovným způsobem života, nebylo pro ně nijak důležité, aby uměli určovat rozměry a plochu polí a dalších prostor. Přesto však již v tomto období můžeme očekávat nějaké základní uvědomění si vzdáleností a směrů. Rozvoj těchto znalostí lze spojit s usedlými zemědělskými civilizacemi, které již potřebovaly vyměřovat pole a složitější stavby. Ani usedlý způsob života však zpočátku nevyžadoval znalost přesného vyměřování. Poptávka po schopnosti měřit, zaznamenávat a vypočítávat vznikla ve chvíli, kdy se začaly zakládat velké osady, stavět paláce a chrámy. To se již dostáváme do období starověku. ([41], s. 18-20)

### 3.2 Egyptští stavitelé a zemědělci

Obyvatelé starověkého Egypta patřili mezi první průkopníky výpočtu obsahů, historie výpočtu sahá do období 3000 let př. n. l. Jejich prvenství má svůj důvod. Zemědělství se v Egyptě nejvíce rozvíjelo v úrodných údolích řeky Nil. Každým rokem však v těchto oblastech docházelo k záplavám, které zničily značky ohraňující pole jednotlivých majitelů. To vedlo k tomu, že se Egypťané naučili pole vyměřovat a též tyto výměry zaznamenávat, a byli tedy po záplavě schopni značky umístit znovu ([29], s. 29). Tento proces byl prováděn tzv. napínači provazů, kteří vyměřovali jak tyto pozemky, tak půdorysy staveb. Podle Petra Vopěnky ([14], s. 11) měřili napínači provazů „čtyři druhy jevu velikosti: délky, plošné obsahy, objemy a velikosti úhlů“. Stejně jako zemědělství bylo pro rozvoj matematiky důležité stavitelství. Stavby rostly a s nimi i nároky například na propočty týkající se výměry půdorysů nebo množství potřebného materiálu.

Egyptané byli navíc jednou z prvních civilizací, jež nejen učinila významné objevy, ale také je začala zaznamenávat. Některé z těchto záznamů se dochovaly dodnes. Jedním takovým je například Ahmosův papyrus ([41], s. 71). Kolem roku 1650 př. n. l. na něj císař Ahmos zapsal pravidla týkající se aritmetiky, algebry a také geometrie – včetně obsahu trojúhelníku. Dnes je papyrus známý také pod názvem Rhindův, podle skotského egyptologa jménem Henry Rhind. Egyptané zapisovali čísla v decimální soustavě, používali pro ně ovšem obrázkový systém. V jedné z řešených úloh je zaznamenán správný výsledek výpočtu obsahu trojúhelníku. Otázkou zůstává, zda Egyptané rozuměli označení výšky trojúhelníku stejně, jako my dnes ([34], s. 12). Ze stejného období pochází také takzvaný Moskevský papyrus, který obsahuje instrukce pro výpočet objemu části pyramidy ([40]).

## 3.3 Antické Řecko

### 3.3.1 Tháles z Milétu

Tháles (cca 624 př.n.l. - 546 př.n.l.) byl řeckým filosofem a matematikem, jeho současníci pro něj měli označení „otec vědy“. Řadili ho také mezi „sedm mudrců“, jak nazývali sedm údajně nejmoudřejších myslitelů antického Řecka ([29], s. 41). Ve své tvorbě uspořádával některé geometrické poznatky o kružnicích a trojúhelnících. V geometrii je dodnes hojně citována a používána *Thaletova věta*, se kterou se dnešní školáci seznamují na druhém stupni základní školy. Takto je popsána v učebnici Fraus, určené pro 8. třídy základních škol:

Sestrojíme-li kružnici s průměrem  $AB$  a zvolíme-li na ní libovolný bod  $C$ , je trojúhelník  $ABC$  pravoúhlý, s pravým úhlem při vrcholu  $C$ . Kružnice se nazývá Thaletova kružnice. ([9], s. 57)

Kromě práce s trojúhelníky zkoumal Tháles také výšku pyramid, kterou určil podle délek jejich stínů. Věnoval se též astronomii, spočítal dobu rovnodennosti a předpověděl první doložené zatmění Slunce.

Ačkoliv se nedochoval žádný Thaletův spis, jeho učení je mnohými matematiky používáno, rozvíjeno a oceňováno dodnes. ([43], s. 264; [29], s. 41)

### 3.3.2 Pythagoras ze Samu

Pythagoras (asi 570-500 př.n.l.) byl slavný řecký filosof a matematik. Ze všech vědních a uměleckých disciplín nejvíce oceňoval matematiku, hudbu a astronomii ([9], s. 16).

Vedl skupinu pythagorejců, jež se zabývala nejen filosofií, ale také politikou a náboženstvím. Na poli filosofie se pythagorejci snažili odůvodnit věčnost a neměnnost světového řádu, podklad takového řádu hledali v číslech. V podstatě všech věcí viděli soulad, harmonii protikladů „neomezena“ a „omezena“ ([14], s. 84-85).

Do problematiky trojúhelníků Pythagoras přispěl vyslovením věty dnes známé pod názvem Pythagorova věta, která hovoří o vztahu mezi velikostmi stran v pravoúhlém trojúhelníku (viz 2.2.8).

### 3.3.3 Eudoxos z Knidu

Eudoxos se narodil v Knidu v Malé Asii, žil v letech 408-355 př.n.l. V mládí cestoval po tehdejší řeckém světě, učil se od Pythagorova obdivovatele jménem Archytos. Svůj čas věnoval hlavně astronomii a matematice.

Přišel s myšlenkou „teorie proporcí“, která poprvé pracovala jak s čísly racionálními, tak i těmi, kterým dnes říkáme iracionální. Bylo velice složité tato čísla srovnávat, a proto Eudoxos vymyslel postup, kdy obě čísla vyjádřil pomocí nějakého třetího čísla, parametru, resp. pomocí jeho násobků. Udělal tak první kroky k práci s iracionálními a reálnými čísly ([29], s. 49; [37], s. 99).

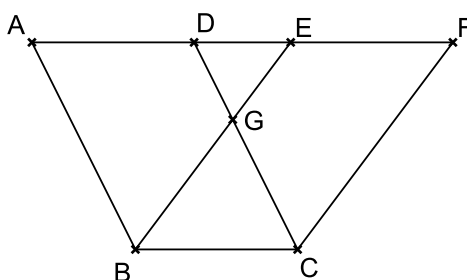
K výpočtu obsahů přispěl rozvinutím exhaustivní metody, kterou pak ještě více propracoval Archimédes (viz 3.3.5). Eudoxa napadlo počítat obsah složitějších obrazců (obzvláště oblých tvarů) tím, že je postupně zaplňoval menšími disjunktními mnohoúhelníky, u kterých obsah spočítat uměl. Postupně tak přidával menší a menší, čímž se součet obsahů všech mnohoúhelníků přibližoval skutečnému obsahu původní plochy. Tento postup byl dokázán až díky diferenciálnímu a integrálnímu počtu na konci 18. století, řeční matematici ho však i přesto hojně využívali pro své další postupy ([37], s. 48).

### 3.3.4 Eukleidés

Eukleidés z Alexandrie, žijící v letech 325 - 265 př. n. l., byl pravděpodobně prvním vedoucím matematické části alexandrijské knihovny, což velmi ovlivnilo jeho tvorbu ([29], s. 59). Mezi důležité matematiky ho řadíme nejen pro vlastní objevy, ale hlavně pro jeho dílo *Základy*. V tomto spisu Eukleidés sesbíral a sepsal dosavadní matematické poznatky Řeků do 3. století př. n. l. ([43], s. 269), jedná se pravděpodobně o knihy Hippokrata z Chiu, Eudoxa z Knidu, Archyta z Tarentu, pythagorejců a Theaitéta z Athén. Nejvíce je oceňována systematická stránka tohoto díla, lidé byli fascinováni také tím, že „se celá rozvětvená a bohatá věda, jako je rovinná geometrie, dá odvodit z pěti celkem jednoduchých základních pravidel“ ([29], s. 60). Dílo se stalo základním stavebním kamenem matematické vzdělanosti pro dalších 2000 let.

Z Euklidova díla *Základy* jsou pro obsah trojúhelníku nejdůležitější tři postuláty, které si nyní uvedeme. První z nich se týká rovnoběžníků se stejným obsahem:

**Rovnoběžníky na téže základně a mezi týmiž rovnoběžkami jsou navzájem stejné.**



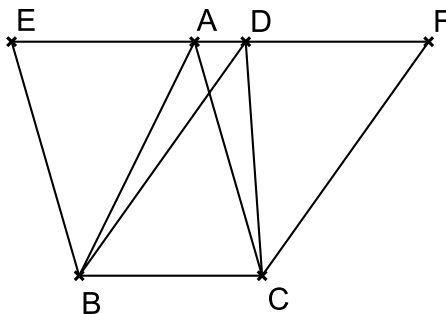
Obrázek 3.1: Základy - postulat XXXV.

Rovnoběžníky budtež  $ABCD$ ,  $EBCF$  na téže základně  $BC$  a mezi týmiž rovnoběžkami  $AF$ ,  $BC$ ; pravím, že  $ABCD = EBCF$ .

Neboť ježto  $ABCD$  jest rovnoběžník,  $AD = BC$ , z téže příčiny ovšem  $EF = BC$ , a tak i  $AD = EF$  a společnou je  $DE$ . Celá tedy  $AE = DF$ . Také však  $AB = DC$ ; obě tedy  $EA$ ,  $AB$  jednotlivě rovnají se oběma  $FD$ ,  $DC$  a  $\angle FDC = EAB$ , vnější vnitřnímu (souhlasnému), tedy základna  $EB = FC$ , a  $\triangle EAB$  bude roven  $\triangle DFC$ . Odečten pak buď společný  $DGE$ ; zbývající tedy lichoběžník  $ABGD = EGCF$ . Společným buď přičten  $\triangle GBC$ ; celý tedy rovnoběžník  $ABCD$  rovná se celému rovnoběžníku  $EBCF$ . ([14], s. 70)

Druhý z postulátů přichází s myšlenkou, že trojúhelníky mezi týmiž rovnoběžkami mají stejný obsah:

**Trojúhelníky na téže základně a mezi týmiž rovnoběžkami jsou si rovny.**



Obrázek 3.2: Základy - postulát XXXVII.

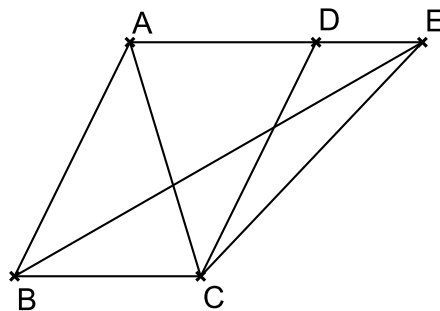
Budtež  $ABC$ ,  $BCD$  trojúhelníky na téže základně  $BC$  a mezi těmi rovnoběžkami  $AD$ ,  $BC$ ; pravím, že  $\triangle ABC = DBC$ .

Prodlužm  $AD$  na obě strany do  $E$ ,  $F$  a z  $B$  vedme  $BE \parallel CA$ , z  $C$  pak vedme  $CF \parallel BD$ ; tedy  $EBCA$  i  $DBCF$  jsou rovnoběžníky a jsou stejné, neboť jsou na téže základně  $BC$  a mezi týmiž rovnoběžkami  $BC$ ,  $EF$ ; a trojúhelník  $ABC$  jest polovina rovnoběžníku  $EBCA$ , neboť úhlopříčka  $AB$  jej pólí (I.XXXIV.); a  $\triangle DBC = \frac{DBCF}{2}$ , neboť úhlopříčka  $DC$  jej pólí. Tedy  $\triangle ABC = DBC$ . ([14], s. 71)

V důkazu tohoto tvrzení se objevuje odkaz na další postulát, uvedený pod číslem XXXIV. Ten stanovuje, že „rovnoběžníky mají protější strany i úhly navzájem stejné a úhlopříčkou se pólí“ ([14], s. 69). Shodnost dvou trojúhelníků, na něž je rovnoběžník úhlopříčkou rozdělen, Euklidés dokazuje obdobou dnešní věty o shodnosti trojúhelníků *usu*, v důkazu též používá shodnost střídavých úhlů.

Třetí z postulátů, hovořící o obsahu trojúhelníku, popisuje vztah mezi rovnoběžníkem a trojúhelníkem, které mají společnou základnu a jsou mezi stejnými rovnoběžkami. Stanovuje poměr mezi jejich obsahy a uvádí podrobný důkaz pro své tvrzení:

**Když má rovnoběžník s trojúhelníkem touž základnu a jest mezi týmiž rovnoběžkami, rovnoběžník je dvakrát větší než trojúhelník.**



Obrázek 3.3: Základy - postulát XLI.

Nuže rovnoběžník  $ABCD$  měj s  $\triangle EBC$  touž základnu  $BC$  a buď mezi týmiž rovnoběžkami  $BC$ ,  $AE$ ; pravím, že rovnoběžník  $ABCD$  je dvakrát větší než  $\triangle BEC$ .

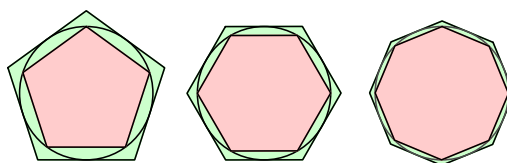
Nuže vedme spojnicí  $AC$ . Stejný zajisté je  $\triangle ABC$  s  $\triangle EBC$ , neboť jest na téže základně  $BC$  a mezi týmiž rovnoběžkami  $BC$ ,  $AE$  (I.XXXVII.). Avšak rovnoběžník  $ABCD = 2ABC$ ; neboť úhlopříčka  $AC$  jej pólí; a tak rovnoběžník  $ABCD$  je dvakrát větší také než  $\triangle EBC$ . ([14], s. 73)

Na těchto poznatcích je založená v dnešní době nejčastěji používaná metoda pro výpočet obsahu trojúhelníku pomocí strany a výšky, vyložená v sekci 4.5.

### 3.3.5 Archimédes

„Často bývá Archimédes ze Syrakus (282-212 př. n. l.) uváděn jako Euklidův protiklad, když jde o to, zda má být matematika užitečná či „jenom“ krásná“ ([29], s. 61). Studoval v Alexandrii, zabýval se problémy mechaniky, výpočetní geometrie, velice se zasadil v porozumění kuželoseček. Většina Archimédových objevů byla spojena s praktickým využitím. Kromě slavného Archimédova zákona, pomocí kterého odhalil podvodný výskyt stříbra v královské koruně, přispěl světu matematiky a fyziky též použitím exhaustivní metody (kde navazoval na poznatky Eudoxa z Knidu, popsané v sekci 3.3.3), pomocí které zobecnil pravidla pro výpočet elipsoidu nebo paraboloidu ([29], s. 62-63).

Je jisté, že Archimédes znal postup pro výpočet trojúhelníku, jelikož z něj vycházel při svých dalších objevech. Pomocí obsahu trojúhelníku například určil obsah paraboly jako  $\frac{4}{3}$  plochy trojúhelníku vepsaného této parabole. Při odvození postupoval exhaustivní metodou, trojúhelník vepsaný podle daných pravidel postupně zjemňoval a tím aproximoval výsledný obsah ([3]).



Obrázek 3.4: Postup při určování hodnoty  $\pi$

Touto metodou Archimédes také přišel na poměrně přesný odhad čísla  $\pi$ . Kružnici vepsal a opsal mnohoúhelník, jehož obvod spočítat uměl. Tento mnohoúhelník postupně zjemňoval, a tím se velice přiblížil skutečné hodnotě čísla  $\pi$  ([29], s. 63; [41], s. 94). Pro ilustraci této metody poslouží obrázek 3.4.

Archimédes též určil obsah kruhu na  $S = \pi \cdot r^2$ . Podle Jindřicha Bečváře by Archimédův postup určování obsahu kruhu mohl dnešním jazykem znít takto: „Obsah kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsnami jsou poloměr a obvod tohoto kruhu“ ([4], s. 6). Vzorec by tedy vypadal  $S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot o$ .

### 3.3.6 Heron Alexandrijský

Jedná se o významného řeckého matematika, optika a mechanika působícího v letech 10 – 70 n. l. Mezi jeho vynálezy řadíme například parní stroj, nazvaný Heronova báhň. V jednom z jeho spisů, objeveném v roce 1896, se objevuje důkaz Heronovy formule, sloužící k výpočtu obsahu trojúhelníku. Využívá přitom pouze znalost velikosti stran trojúhelníku, nepotřebuje znát výšku, úhly, ani další trojúhelníkové elementy. Heronova formule určuje obsah takto:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ kde } s = \frac{1}{2}(a+b+c). \text{ ([39]; [29], s. 59)}$$

## 3.4 Čínská matematika

Matematika se samozřejmě nerozvíjela jen na evropském kontinentu a severu Afriky. Asijské státy též učinily mnoho významných objevů. Jako první jmenujme Čínu. Dalo by se předpokládat, že se po obchodní hedvábné stezce mohly kromě zboží šířit i některé znalosti a tudíž nemůžeme jednoznačně připisovat dané objevy více matematikům z různých kontinentů. Většina argumentů ale nasvědčuje tomu, že „se matematika vyvíjela v uvažovaných částech světa samostatně“ ([38]). Asijské a Evropské matematické tak přišli na spoustu objevů nezávisle na sobě.

Knihou, která se stala základním textem čínské a také japonské matematiky, byla Jiuzhang suanshu (Devět traktátů o matematickém umění). Najdeme zde „pojednání o kmenových zlomcích, plochách základních geometrických obrazců (včetně kruhu a jeho úsečí) i výsečí z povrchu koule“ ([29], s. 98). Tato kniha je jedním z argumentů, že asijská matematika nebyla ovlivněna evropskou. Například se zde objevila obdoba Pythagorovy věty, nazývá se větou Gougu. Jako další důkaz, že evropská a asijská matematika procházely vlastním vývojem, může být brán i matematik Zhu Shijie, žijící v letech 1265-1320, který vytvořil systém řešení rovnic, jenž odpovídá evropské Gaussově metodě. V jedné ze svých knih také rozebíral to, čemu se v Evropě říká Pascalův trojúhelník, došel v něm až do osmé mocniny ([29], s. 98-99).

Podle Milana Mareše ([29], s. 98) však čínští matematici nebyli v porovnání s matematickými postupy Evropanů tolik důslední. Mareš kritizuje, že málokdy dokazovali nová tvrzení a pokud se nějaký důkaz v dílech objevil, byl spíše rámcový, provedený na základě náznaků. Další rozdíl můžeme vidět v uplatnění matematiky a jejím následném rozvoji. Zájem o rozvoj postupů končil v Asii tam, kde končilo jejich praktické uplatnění. Jinými slovy, „čínská matematika neprošla tím, co s evropskou udělali Thales, Pythagoras

a Aristoteles (a v čem pak pokračovali ostatní) – nestala se z praktické dovednosti, jakkoli sofistikované a pokročilé, pohledem na svět, tedy skutečnou vědou s vlastní filosofií a se vším, co k tomu patří“ ([29], s. 96).

### 3.5 Tradice matematiky v Indii

První poznatky o indické matematice pocházejí z období, ve kterém vznikaly posvátné nábožensko-filosofické knihy zvané „Veda“. Důležitým pramenem jsou knihy „Šalvasútra“ neboli „Pravidla provazce“. Období jejich vzniku není přesně známo, většina odborníků se přiklání k dataci 7. - 5. století př.n.l. V tomto spisu jsou obsaženy výsledky některých výpočtů a jsou zde popsány geometrické konstrukce, využívané hlavně při stavbě oltářů. Kniha popisuje konstrukci pravého úhlu, čtverce, pravoúhlých trojúhelníků, lichoběžníků atd. Autor uvádí obdobu Pythagorovy věty, která je zavedena nejprve pro rovnoramenné trojúhelníky, a posléze zobecněna ([25], s. 97-101).

Matematik Áryabhatta, působící kolem roku 500 n.l., ve svém spisu „Áryabhattíja“ uvádí metody výpočtu obsahu čtverce, objemu krychle, a také obsahu trojúhelníku. Ten určil jako  $S = av_a/2$ . Také se zabýval odhadem čísla  $\pi$ , kterému v jednom ze svých postupů přiřadil hodnotu  $\pi = 3,1416$ , což se od skutečné hodnoty liší asi o 0,00001 ([25], s. 156-157).

Z dalších významných spisů můžeme zmínit například „Zdokonalení nauky Brahmy“, jež se zabývá jak aritmetikou, tak i měříčskými výpočty některých geometrických útvarů. Jeho autorem je Brahmagupta, učenec narozený roku 598. V díle uvádí Heronův vzorec, který mohl být do Indie přivezen z helénistických zemí. Vyslovuje také Pythagorovu větu a popisuje výpočet průměru kružnice opsané čtyřúhelníku a trojúhelníku ze znalosti jejich stran ([25], s. 158).

Dále je třeba uvést dílo „Koruna vědy“, napsané kolem roku 1150, které je označováno za vrchol tehdejší matematiky. První část „Koruny vědy“, „Lílávati“, se věnuje aritmetice a geometrii, obsahuje například úlohy věnované otázkám vodních nádrží (nejspíše přejaté od Řeků nebo Číňanů), měření rovinných obrazců nebo měření objemů. Druhá část, „Bídzaganita“, obsahuje dva důkazy Pythagorovy věty.

Z dalších poznatků indické matematiky, vztahující se k problematice trojúhelníku, stojí za zmínku například objevení vztahu goniometrických funkcí  $\sin$  a  $\cos$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

nebo vzorec pro sinus polovičního úhlu

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad ([25], \text{ s. } 167).$$

Vůči indické matematice bychom mohli mít stejnou výtku, jakou vznesl Milan Mareš vůči matematice čínské. Indové byli v matematických spisech velmi struční. Většina z jejich tvrzení byla doplněna pouze obrázkem a uvedena bez formálních důkazů. Znalec indické matematiky al-Bírúní považoval indickou matematickou vědu za neuspořádanou v prezentaci výsledků i ve výkladu samotném a označil ji za „směsici krystalů s obyčejnými kamínky“ ([25], s. 164).



## 3.6 Matematika arabských států

Počátky matematiky v arabském světě se začaly rozvíjet ze stejného důvodu jako matematika starověkého Egypta, nutnost vzniku matematických věd podmiňovaly problémy týkající se stavebnictví, zeměměřičství, obchodu, státních financí a dalších oblastí lidského života ([25], s. 181).

Rozvoj islámské matematiky lze rozdělit do tří hlavních etap. Nejprve docházelo k přejímání poznatků řecké i orientální tradice. Kolem 9. století začala vznikat svérázná tradice arabských států. V 11. - 15. století pak arabská matematika existovala samostatně, navazovala na svou tradici několika posledních století, prvky řecké matematiky se však zachovaly. Vliv řecké matematiky se projevil nejen v metodách, ale také ve způsobu vedení důkazů a v systematickosti uspořádání látky a úplnosti jejího výkladu. Tím se matematika islámských států radikálně liší od tradice zemí dálného východu ([25], s. 182).

Z představitelů islámské tradice je nutné zmínit matematika al-Chwárizmího, který je považován za zakladatele moderní algebry. Na základě jeho poznatků se mohla dále rozvíjet algebra, aritmetika a trigonometrie ([1]). V oblasti geometrie se al-Chwárizmí zabývá především trojúhelníky, čtyřúhelníky a kruhy. Pythagorovu větu dokazuje pouze pro zvláštní případ rovnoramenného trojúhelníku. Některé z úloh objevujících se v al-Chwárizmího dílech jsou téměř totožné s Hérónovými. Jedná se například o úlohu o výpočtu obsahu rovnostranných a ostrohlých trojúhelníků, kde al-Chwárizmího verze odpovídá té Hérónově včetně délek stran zkoumaných trojúhelníků. Úlohy určující obsah trojúhelníku tupohlého se však u obou matematiků liší. Al-Chwárizmí po sobě zanechal bohatý odkaz, jeho díla Geometrie, Algebra i Aritmetika velice ovlivnily všechny další matematické objevy ([25], s. 215-218).

Dalšími důležitými matematiky byli tři bratři banu-Músá. Díla byla vydávána pod autorstvím všech tří a je nemožné rozlišit, čím konkrétně přispěli každý z nich jako jednotlivci. Zabývali se matematikou, astronomií, hudebními nástroji a mechanikou. Dodnes se dochovala „Kniha tří bratrů o geometrii“. Její přesný název zní „Kniha o měření rovinných a sférických obrazců“. Zabývá se obsahem kruhu, je zde první písemná zmínka o starořecké exhaustivní metodě (3.3.3) v originálním arabském textu ([25], s. 267-268).

Praktickou geometrií se zabývá „Kniha o tom, co je z geometrických konstrukcí nezbytné pro řemeslníka“, kterou sepsal Abu l'-Wafá. Obsahuje velké množství různých konstrukcí, jichž znalost je nutná v zeměměřičství, geodézii, technice i architektuře. Jedna z uvedených konstrukcí odpovídá konstrukci Pythagorovy věty tak, jak ji dokazovali matematici v Číně a také Indii, odkud byla nejspíš přejata ([25], s. 270-272).

Další důležitou oblastí matematiky byla trigonometrie, která povzbuzovala rozvoj ostatních vědních disciplín. Jedním z důvodů jejího rozvoje je islámské vyznání, konkrétně povinnost všech věřících modlit se směrem k Mekce. Rozvoj trigonometrie, včetně řešení sférických trojúhelníků, byl zásadní k tomu, aby tento směr modlitby mohl být zaznamenán v každé měsitě. Nejsystematičtější jsou základy trigonometrie popsány v traktátu Abu l'-Wafy „Kniha dokonalosti“ ([25], s. 290-293).

## 3.7 Moderní přístupy v matematice

### 3.7.1 René Descartés

René Descartes, narozen roku 1596 ve Francii, byl vynikající filosof, fyzik a matematik. Je považován za zakladatele principů analytické geometrie. Zformuloval základní pravidla pro práci s kartézskou soustavou souřadnic, čímž propojil dosavadní znalosti geometrie a algebry. Descartes, na rozdíl od dnešního pojetí soustavy souřadnic (viz 2.3.2), používal pouze kladné části os  $x$  a  $y$ , jelikož je definoval jako vzdálenosti mezi body ([12]). Descartes byl přesvědčen o univerzálnosti využití této metody. Tvrdil, že řešení mnoha problémů může spočívat v jejich převedení na řešení rovnic ([43], s. 279).

### 3.7.2 Pierre de Fermat

Pierre de Fermat byl francouzský matematik působící v 17. století. Vysloužil si přezdívku „král amatérů“. Přestože neabsolvoval matematické vzdělání na akademické půdě a matematice se věnoval jen ve svém volném čase, dosáhl mnoha úspěchů. Zabýval se teorií čísel a také geometrií, v níž došel k několika stejným závěrům jako Descartes, včetně základů soustavy souřadnic. Na rozdíl od Descarta však Fermat nepoužíval vždy výhradně odbornou terminologii a pro některé matematické jevy vymýšlel své vlastní názvy ([29], s. 144). Do geometrie přispěl například vyjádřením kanonických tvarů rovnic kuželoseček, nebo formulací a řešením prostorové obdoby Apollóniových úloh, tzv. Fermatových úloh o kulových plochách ([43], s. 281).

Fermat ani Descartes nepřispěli k obsahu trojúhelníku žádným konkrétním výpočtem, položili však základy analytické geometrie a umožnili tak rozvoj dalších metod výpočtu.

### 3.7.3 Gottfried Wilhelm Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) byl německým matematikem, filosofem, a také diplomatem. Od raného mládí se projevoval jeho obrovský talent, Leibniz byl neuvěřitelně všestranný. Číst se naučil ve čtyřech letech. Vedle povinných předmětů se navíc učil řecky a latinsky, a mohl tak číst spisy slavných řeckých matematiků v originálním znění. Na univerzitě v Lipsku obsáhl veškeré učení v matematice, filosofie, teologii a právu. Dlouhé roky působil jako diplomat, zajímal se o mezinárodní vztahy s Francií, Anglií, vyjadřoval se například i k záležitostem Egypta.

Leibniz byl všestranný nejen co do počtu oborů, ve kterých exceloval, ale též v rámci každého oboru zvlášť. V oblasti matematiky přispěl svými poznatky týkajícími se součtu nekonečných řad, sestavení tečen k daným křivkám, pracoval s derivací nebo také řešil rovnice o více neznámých ([18]; [29], s. 176-177). Leibniz přišel na výpočet obsahu plochy pomocí určitého integrálu, dnes se tento postup nazývá Newton-Leibnizova formule. Oba matematici vzorec objevili přibližně ve stejnou dobu. O tom, kdo z nich byl první, vedli dokonce i soudní spor. Nakonec je vzorec pojmenován po obou.

### 3.7.4 Simon Antoine Jean L'Huilier

Simon l'Huilier (1750-1840) začal svou kariéru jako učitel matematiky v Ženevě. V roce 1777 byl oceněn za svou učebnici aritmetiky, později přidal ještě učebnice týkající se

geometrie a algebry. Nějakou dobu svého života pobýval v Polsku, kde byl soukromým učitelem prince Adama Czartoryskiho ([54], s. 62-63).

V oblasti geometrie přispěl l'Huillier odvozením vzorců na výpočet plochy obecného  $n$ -úhelníku z pravoúhlých souřadnic jeho vrcholů ([44]). Tento postup je dnes nazván l'Huillierovými vzorci a je hojně využíván v geodetické praxi. Tato metoda je podrobněji rozebrána v části 4.10.

### 3.7.5 Bernhard Riemann

Bernhard Riemann se narodil roku 1826 v Breselenzu, v oblasti Hannoverska, do rodiny luteránského pastora. Na střední škole v místě svého rodiště přilákal zájem profesorů svým osobitým studiem Bible, jejíž pravdivost a správnost ověřoval matematickými postupy ([29], s. 243).

V roce 1840 se přestěhoval ke své babičce do Hannoveru, kde nastoupil do lycea. Zde získal pozornost ředitele školy, který ho začal zásobovat spisy významných matematiků, mezi nimi například Legendrův spis pojednávající o teorii čísel, nebo práce Leonharda Eulera. Riemannův matematický talent se tak mohl plně rozvíjet ([6]). Další matematické vzdělání získával Riemann na univerzitách v Göttingenu a v Berlíně.

Svou habilitační práci, která byla nutnou podmínkou, aby Riemann mohl vést přednášky a zůstat na univerzitě, zpracovával celkem třicet měsíců. Jejím výsledkem byla přednáška *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (O hypotézách, které leží v základech geometrie). Tato přednáška je považována za jednu z nejdůležitějších a nejprelomovějších v historii novodobé matematiky. V této přednášce a v pracech, které na ní navazovaly, představil svou koncepci neeuklidovské geometrie, která není omezená pouze na dvourozměrnou plochu, ale umožňuje zkoumat zakřivené prostory o jakémkoli počtu rozměrů. Je autorem toho, čemu dnes říkáme Riemannův integrál, dále také přispěl ke studiu parciálních diferenciálních rovnic. ([29], s. 243-244; [6])

Bernhard Riemann zemřel v roce 1866 na tuberkulózu. I za svůj poměrně krátký život však v matematickém světě zanechal nezapomenutelný odkaz.

### 3.7.6 Georg Alexander Pick

Tento rakouský matematik se roku 1859 narodil do židovské rodiny. Prošel domácím vzděláváním a v 11 letech nastoupil na Leopoldstadter Communal Gymnasium. Studoval na univerzitě ve Vídni, jeden čas působil jako řádný profesor matematiky na pražské německé univerzitě. Po obsazení Rakouska v roce 1938 odešel do Prahy. V roce 1942 byl pro svůj židovský původ poslán do Terezína, kde během 14 dnů zemřel ([35], [16]).

V matematice byl Pick velice všestranný. Přispěl pracemi z lineární algebry, teorie invariantů, integrálního počtu, diferenciálního počtu, geometrie, diferenciálních a integrálních rovnic a mnoha dalších oblastí ([17]). Všeobecně známa je Pickova formule, která je vcelku jednoduchým nástrojem na výpočet obsahu mřížových mnohoúhelníků, a které je v této práci věnován prostor v části 4.4.

## Kapitola 4

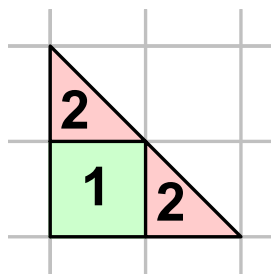
# Jednotlivé metody zjišťování obsahu trojúhelníku

K samotnému zjišťování obsahu trojúhelníku bylo za historii matematiky vymyšleno nespočet postupů. Některé jsou aplikovatelné na malé množství typů trojúhelníků, jiné jsou obecnější. Některé vyžadují práci v mříži, některé metrické vztahy, velikosti stran či úhlů, jiné z nich používají souřadnice vrcholů trojúhelníku v kartézské soustavě. V této části bakalářské práce budou vybrané metody postupně představeny a důkladně rozebrány. U každé z nich budou popsány její výhody a nevýhody a bude ukázáno, co je k jejímu postupu nutné znát ze zadání a jaké nároky si metoda klade na žákovu úroveň ve vzdělávání.

### 4.1 Určování počtu čtverců

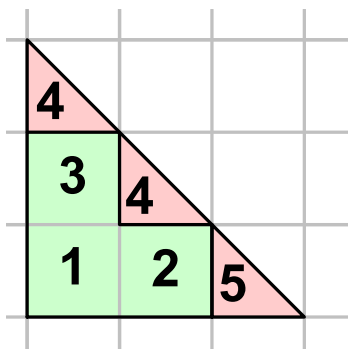
Tato metoda je často používána při prvním setkání žáků s pojmem obsahu trojúhelníku, resp. obsahů obecně ([21], s. 26). Je velice názorná a žák na obsah dokáže přijít, aniž by musel použít jakýkoli vzorec. Ve vyšších ročnících jsou žáci schopni z určení obsahu několika konkrétních trojúhelníků touto metodou vyvodit obecný vzorec pro výpočet pomocí strany a výšky (viz 4.5).

Principem této metody je, že si žáci číslují čtverce, přes které je trojúhelník rozprostřen, a to tak, že vždy přiřadí jedno číslo jednomu celému čtverci. Na obrázku 4.1 můžeme vidět, že žák by celému čtverci přiřadil číslo 1 a číslem 2 by označil dva trojúhelníky, které dohromady dají také jeden celý čtverec. Žák při tomto číslování postupuje naprosto intuitivně.



Obrázek 4.1: Ukázka určování počtu čtverců

První překážkou v tomto postupu může být, pokud obsah trojúhelníku není v celých čtvercích. Žáci se tak skrz jednoduchou metodu učí vyjadřovat část celku. Jak je vidět na obrázku 4.2, žáci postupují stejně jako u předchozího trojúhelníku. Poslední části přiřadí číslo 5, v celkovém součtu však musí rozlišit, že tomuto trojúhelníku chybí druhá polovina, která by spolu s daným trojúhelníkem vytvořila celý čtverec.



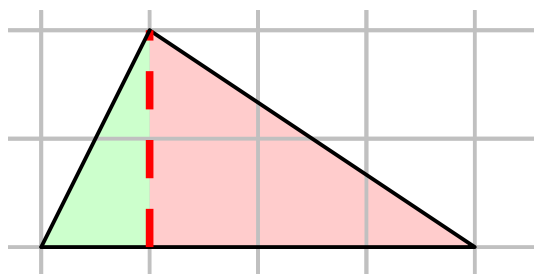
Obrázek 4.2: Počet čtverců - práce s necelou částí

Žáci jsou tímto způsobem schopni určit obsahy libovolných mřížových útvarů, nejen trojúhelníků. Nevýhodou této metody je, že je založena spíše na odhadu než na korektním výpočtu. Pro žáky však může být výhodná například v tom, že trénuje jejich prostorovou představivost, odhady vzdáleností, vede k pochopení pojmu obsah geometrického útvaru a rozvíjí schopnost práce s částí celku.

## 4.2 Metoda rozřezávání

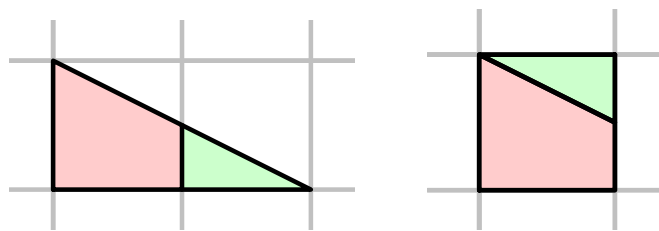
Tato metoda je úzce spjata s metodou první, ve druhém kroku této metody často přecházíme k řešení obsahu metodou 4.1. Metodu je možné použít díky vlastnosti aditivity, která je pro míru geometrického útvaru charakteristická. Principem tohoto postupu je, že zadaný trojúhelník doslova rozřízneme na trojúhelníky menší, jichž obsahy jsme schopni určit snáz.

Pro vysvětlení použijme rozříznutí naznačené na následujícím obrázku:



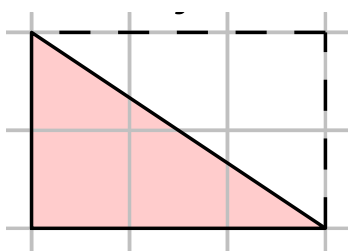
Obrázek 4.3: Rozříznutí trojúhelníku na dva menší

Vzniklé dva trojúhelníky nyní řešíme samostatně. První z nich (na obrázku vlevo) lze řešit dalším rozříznutím na dvě části, které pak složíme do jednoho jednotkového čtverce.



Obrázek 4.4: Složení trojúhelníku do jednoho jednotkového čtverce

Při určování obsahu druhého ze vzniklých trojúhelníků jsou žáci často schopni nahlédnout, že obsah tohoto trojúhelníku tvoří polovinu obdélníku (viz obr. 4.5). Žáci tak přirozeně použijí vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku pomocí strany a výšky, aniž by ho měli definovaný.

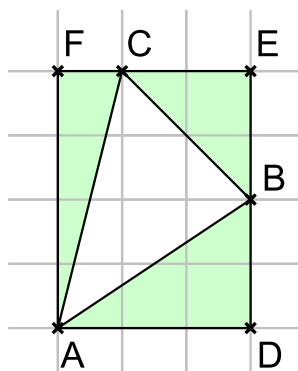


Obrázek 4.5: Náznak doplnění trojúhelníku na obdélník

### 4.3 Metoda rámování

Postup rámování též navazuje na metodu 4.1, ale umožňuje žákům spočítat i složitější mřížové trojúhelníky, na které předchozí dvě metody nestačí, nebo jsou zbytečně složité. Žáci postupují tak, že zadaný trojúhelník ohraničí nejmenším možným pravidelným čtyřúhelníkem. Od něj pak odčítají obsahy pravoúhlých trojúhelníků, které vzniknou v prostoru mezi hranicí trojúhelníku a hranicí čtyřúhelníku, a jejich obsah zjišťují metodami 4.1 a 4.2 ([19], s. 41).

Postup můžeme ukázat například na tomto  $\triangle ABC$ :



Obrázek 4.6: Metoda rámování

Trojúhelník  $ABC$  je orámován čtyřúhelníkem  $ADEF$ . Obsah zadaného trojúhelníku spočítáme jako rozdíl obsahu čtyřúhelníku  $ADEF$  a obsahů vzniklých pravoúhlých trojúhelníků  $\triangle ADB$ ,  $\triangle CBE$  a  $\triangle ACF$ , tedy:

$$S_{\triangle ABC} = S_{ADEF} - S_{\triangle ADB} - S_{\triangle CBE} - S_{\triangle ACF}$$

Zatímco metoda rozřezávání (viz 4.2) je přirozeně používána už žáky na prvním stupni základní školy, metoda rámování dělá problémy i žákům vyšších ročníků ([47], s. 30).

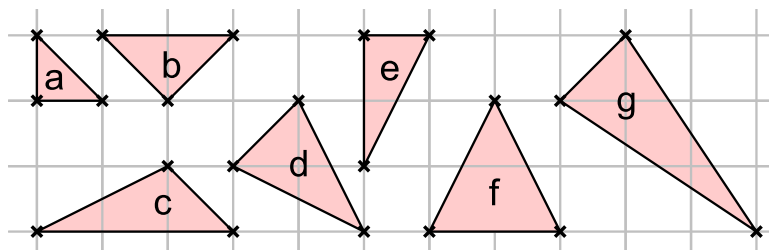
## 4.4 Pickova formule

Další metodou výpočtu, jež je vcelku intuitivní a žáci jsou schopni na její zobecnění přijít sami, je Pickova formule. Tento postup představil rakouský matematik Georg Alexander Pick, jemuž je věnována sekce 3.7.6. Znění této věty není omezeno pouze na trojúhelníky, ale platí pro libovolné mnohoúhelníky. Vzorec pro výpočet je

$$S = V + \frac{H}{2} - 1,$$

kde  $V$  značí počet mřížových bodů ležících uvnitř mnohoúhelníku a  $H$  počet mřížových bodů ležících na hranici tohoto mnohoúhelníku ([19], s. 45). Podmínkou pro použití tohoto vzorce je, aby vrcholy daného mnohoúhelníku samy byly mřížovými body ([20], s. 130).

Na obecně platný vzorec mohou žáci přijít samostatně, jeden z možných návodů popisuje Milan Hejný v jednom ze svých článků pro časopis Učitel matematiky ([20], s. 129-130). Pro vysvětlení postupu použijeme trojúhelníky z obrázku 4.7. Hodnoty  $H$ ,  $V$  a  $S$  pro jednotlivé trojúhelníky zapíšeme do tabulky (viz 4.1).



Obrázek 4.7: Zadání pro odvození Pickovy formule

	a	b	c	d	e	f	g
H	3	4	5	3	4	4	3
V	0	0	0	1	0	1	2
S	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	2	$\frac{5}{2}$

Tabulka 4.1: Hodnoty z obrázku 4.7

Pro odvození obecného vzorce budeme postupovat metodou uvolňování souřadnic. Ta spočívá v tom, že zafixujeme jednu z hodnot, další měníme a zkoumáme, jakým způsobem se vzájemně ovlivňují.

	a	d	g
H	3	3	3
V	0	1	2
S	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$

Tabulka 4.2: Hodnoty - fixace  $H = 3$

Nejprve zafixujeme hodnotu  $H = 3$ . Tu mají v obr. 4.7 tři trojúhelníky,  $a$ ,  $d$ , a  $g$ . Jejich hodnoty si vypíšeme do zvláštní tabulky (4.2).

Z této tabulky lze jednoznačně vyčíst, že zvětšujeme-li  $V$  o 1, obsah se též zvětšuje o 1. Pro další pozorování zafixujeme právě hodnotu  $V$ , a to  $V = 0$ .

	a	b	c	e
H	3	4	5	4
V	0	0	0	0
S	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	1

Tabulka 4.3: Hodnoty - fixace  $V = 0$

Tady by žáci slovně mohli popsat vztah mezi  $H$  a  $S$  jako „Vezmu  $H$ , vydělím dvěma a odečtu 1“, do rovnice by ho mohli zapsat jako  $S = \frac{H}{2} - 1$ .

Spojíme-li tyto dva poznatky, že obsah roste s rostoucím  $V$  a že platí vztah o půlení  $H$  a odčítání 1, vznikne nám Pickova formule:

$$S = V + \frac{H}{2} - 1.$$

Pokud žáci nejsou schopni nahlédnout obecně platný vzorec užitím těchto dvou poznatků, mohou v daném postupu pokračovat. Mohou libovolně fixovat vždy jednu z hodnot  $V$ ,  $H$  i  $S$ , vytvářet pro ně speciální tabulky a hledat další souvislosti.

Formální důkaz Pickovy formule je poněkud složitější, jeden z možných důkazů vedeme takto ([13], s. 15-19):

1. Dokážeme, že vzorec platí pro libovolný obdélník se stranami délky  $a$ ,  $b \in \mathbb{N}$ , který má hrany rovnoběžné s osami  $x$  a  $y$ . Pro tento obdélník se  $H = 2a + 2b$  a  $V = (a - 1)(b - 1)$ . Pickův vzorec platí, protože:

$$S = V + \frac{H}{2} - 1 = (a - 1)(b - 1) + \frac{1}{2}(2a + 2b) - 1 = ab,$$

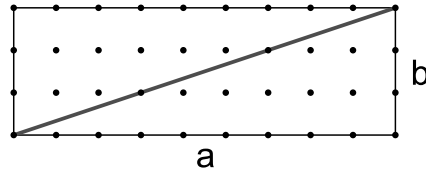
což odpovídá vzorci pro výpočet obsahu obdélníku.

2. Vzorec také platí pro libovolný pravoúhlý trojúhelník, který si můžeme představit jako polovinu obdélníku, jenž je používán v prvním bodu důkazu. Takový trojúhelník má odvěsny  $a$  a  $b$ , jak je vidět na obrázku 4.8.

Označíme-li  $H^*$  počet mřížových bodů ležících na přeponě trojúhelníku, včetně krajních bodů, pak počet mřížových bodů na hranici trojúhelníku je

$$H = a + b + H^* - 1.$$





Obrázek 4.8: Důkaz Pickovy formule pro pravoúhlý  $\triangle$

Pro určení počtu vnitřních bodů trojúhelníku využijeme toho, že jsme trojúhelník získali jako polovinu obdélníku z bodu 1.  $H^*$  mřížových bodů leží na hranici obou pravoúhlých trojúhelníků, platí tedy:

$$2V + 2H = (a + 1)(b + 1) + H^*$$

Tuto rovnost vydělím dvěma a získám:

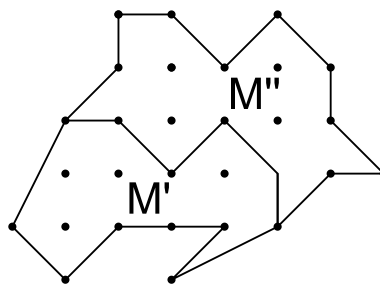
$$V + H = \frac{1}{2}((a + 1)(b + 1) + H^*)$$

Dosazením do Pickovy formule vychází vztah:

$$S = V + \frac{H}{2} - 1 = V + H - \frac{H}{2} - 1 = \frac{1}{2}((a + 1)(b + 1) + H^*) - \frac{1}{2}(a + b + H^* - 1) - 1 = \frac{ab}{2}$$

Tímto jsme dokázali, že vzorec opravdu platí pro libovolný pravoúhlý trojúhelník.

3. Pro důkaz Pickova vzorce je dále potřeba vyslovit jeho vlastnost aditivity. Jinými slovy potřebujeme ukázat, že rozdělíme-li libovolný mnohoúhelník na dva menší disjunktní mnohoúhelníky, pro které Pickův vzorec platí, platí i pro mnohoúhelník z nich složený. Všechny mnohoúhelníky, pro které tvrzení platí, jsou tzv. jednoduché, což značí, že jejich hranicí je uzavřená lomená čára. Vezměme například mnohoúhelník  $M$  a rozdělme ho na mnohoúhelníky  $M'$  a  $M''$ , viz obrázek 4.9.



Obrázek 4.9: Mnohoúhelníky  $M'$  a  $M''$  pro důkaz vlastnosti aditivity

Pro obsahy mnohoúhelníků jistě platí

$$S_M = S_{M'} + S_{M''}.$$

Předpokládejme, že pro  $M'$  a  $M''$  platí Pickova formule, tedy:

$$S_{M'} = V' + \frac{H'}{2} - 1,$$

$$S_{M''} = V'' + \frac{H''}{2} - 1.$$

Označme si  $H^*$  počet mřížových bodů ležících na hranici obou dílčích mnohoúhelníků. Pak platí:

$$V = V' + V'' + H^* - 2,$$

$$H = H' + H'' - 2H^* + 2$$

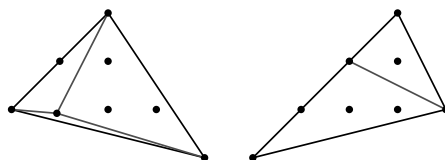
Obsah mnohoúhelníku  $M$  lze tedy vyjádřit:

$$\begin{aligned} S_M &= S_{M'} + S_{M''} \\ &= \left(V' + \frac{H'}{2} - 1\right) + \left(V'' + \frac{H''}{2} - 1\right) \\ &= (V' + V'' + H^* - 2) + \frac{1}{2}(H' + H'' - 2H^* + 2) - 1 \\ &= V + \frac{H}{2} - 1 \end{aligned}$$

4. Posledním bodem důkazu je tvrzení, že libovolný mřížový mnohoúhelník má elementární triangulaci. Elementární triangulace znamená, že mnohoúhelník rozdělíme na tzv. elementární trojúhelníky - trojúhelníky, jichž vrcholy jsou mřížové body, ale které už žádné další mřížové body neobsahují, ani uvnitř, ani na své hranici. Každý z těchto trojúhelníků má obsah  $S = \frac{1}{2}$  a platí pro něj Pickova formule.

Důkaz, že každý mnohoúhelník má elementární triangulaci, lze provést následovně. Každý mnohoúhelník může být pomocí úhlopříček rozdělen na dva trojúhelníky s vrcholy v mřížových bodech a každý neelementární mřížový trojúhelník může být rozdělen na dva nebo tři menší trojúhelníky. Pro tento postup platí tato dvě pravidla (viz obr. 4.10):

- pokud trojúhelník obsahuje vnitřní mřížový bod, rozdělíme trojúhelník spojením tohoto vnitřního mřížového bodu s vrcholy trojúhelníku,
- pokud trojúhelník obsahuje mřížový bod na hraně, rozdělíme trojúhelník spojením tohoto hraničního bodu s protějším vrcholem.

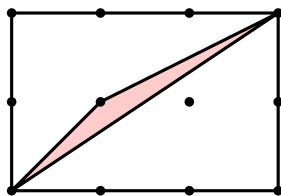


Obrázek 4.10: Dělení neelementárních trojúhelníků

Opakováním těchto tří dělících principů dojdeme do stavu, kdy všechny dílčí trojúhelníky budou elementárními. Takový stav dělení nazveme elementární triangulací.

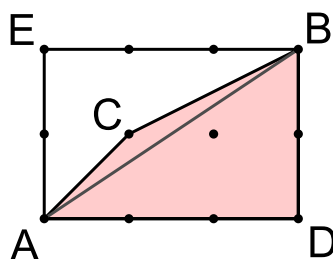
Dále je třeba dokázat, že každý elementární trojúhelník má obsah  $S = \frac{1}{2}$  (což mimo jiné říká, že počet trojúhelníků libovolné elementární triangulace jednoho mnohoúhelníku je vždy stejný). Každý mřížový trojúhelník může být orámován obdélníkem, jehož strany jsou rovnoběžné s osami  $x$  a  $y$ . Jedna strana elementárního

trojúhelníku musí nutně být zároveň úhlopříčkou obdélníku. Pokud by totiž nebyla, jistě by obsahoval alespoň jeden vnitřní bod a tudíž by trojúhelník nebyl elementární. Dále je nutné, aby jedinými mřížovými body úhlopříčky byly její krajní body (viz obr. 4.11).



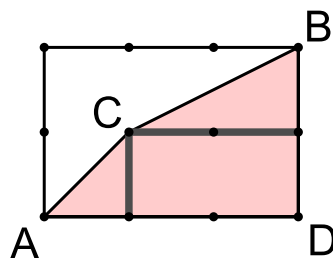
Obrázek 4.11: Odvození Pickovy formule pro elementární trojúhelník

Orámováním trojúhelníku  $ABC$  obdélníkem  $ADBE$  vznikne čtyřúhelník  $ADBC$ .



Obrázek 4.12: Znázornění čtyřúhelníku  $ADBC$

Ten se skládá ze dvou pravoúhlých trojúhelníků a obdélníku (viz obr. 4.13), pro které jednotlivě Pickova formule platí, a platí tedy i pro jejich složení. Pickova formule platí pro čtyřúhelník  $ADBC$  i pro trojúhelník  $ADB$ , jelikož je pravoúhlý, a musí tedy platit i pro jejich rozdíl - trojúhelník  $ABC$ . Elementární trojúhelník má  $V = 0$  a  $H = 3$ , tedy dosazením do vzorce vychází  $S = 0 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ .



Obrázek 4.13: Rozdělení čtyřúhelníku na dva  $\triangle$  a obdélník

Obsah každého elementárního trojúhelníku je  $\frac{1}{2}$  a platí pro něj Pickova formule. Z vlastnosti aditivity plyne, že pokud libovolný mnohoúhelník lze rozdělit na tyto elementární trojúhelníky, pro něž Pickova formule platí, platí i pro zadaný mnohoúhelník.

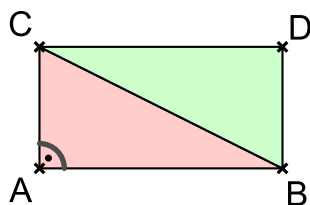
Tímto jsme dokázali, že Pickova formule platí pro libovolný mnohoúhelník, a tedy i pro libovolný trojúhelník, pro nějž Pickovu formuli používám v této práci.

## 4.5 Základní vzorec - použití strany a výšky

„Obsah trojúhelníku je roven polovině součinu strany a k ní příslušné výšky“ ([22], s. 101).

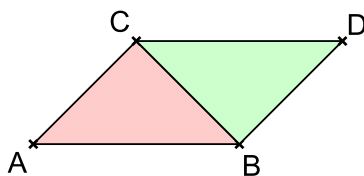
Tento vzorec je nejčastěji používaným a zároveň nejčastěji vyučovaným ze všech postupů zjišťování obsahu trojúhelníku. Odvození postupu lze žákům názorně předvést. Výpočet má kořeny již ve starověkém Řecku (viz 3.3.4) a vychází z poznatku, že trojúhelník lze doplnit na čtyřúhelník, jehož obsah umíme určit a je vzhledem k obsahu daného trojúhelníku dvojnásobný.

Pro první setkání žáků s tímto vzorcem lze postup názorně ukázat na pravoúhlém trojúhelníku, který je možné snadno doplnit na obdélník ([31]), jak je vidět na obr. 4.14. Tento princip si žáci často uvědomí již v metodě 4.1, používaný vztah však zpočátku není nijak formalizovaný.



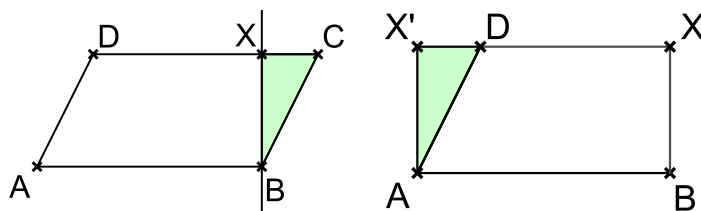
Obrázek 4.14: Doplnění pravoúhlého trojúhelníku na obdélník

Libovolný trojúhelník neobsahující pravý úhel lze stejným způsobem doplnit na rovnoběžník ([33], s. 55). Na obr. 4.15 je ukázáno doplnění trojúhelníku  $ABC$  na rovnoběžník  $ABDC$ . Poznotek, že se v tomto případě obsah trojúhelníku rovná polovině obsahu rovnoběžníku, se objevil již z Euklidových Základech (viz 3.3.4).



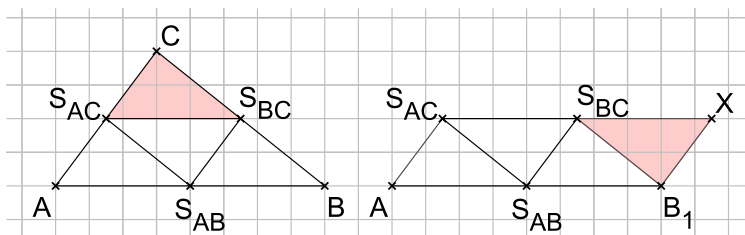
Obrázek 4.15: Doplnění obecného trojúhelníku na rovnoběžník

Vzorec pro výpočet obsahu rovnoběžníku žáci mohou znát, případně je možné převést příklad na obsah obdélníku ([31]), a to tímto způsobem:



Obrázek 4.16: Rovnoběžník převedený na obdélník - pomocný výpočet

Výpočet pomocí strany a výšky lze též dokázat užitím vlastností středních příček. Ty trojúhelník rozdělí na čtyři menší, shodné trojúhelníky. Jeden z nich odstříhneme a přiložíme ke zbylým třem tak, že utvoří rovnoběžník ([22], s. 101), jak je vidět na obr. 4.17. Tento rovnoběžník má výšku rovnou polovině  $v_c$  a jeho obsah už umíme spočítat pomocí vzorce.

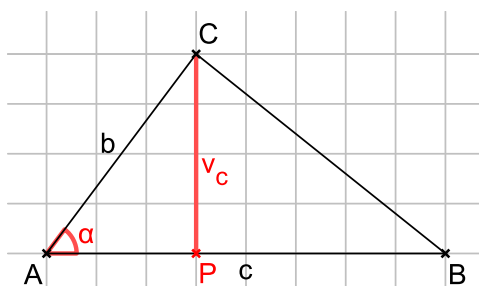


Obrázek 4.17: Důkaz pomocí středních příček

## 4.6 Využití goniometrické funkce sinus

Další z možností, jak zjistit obsah trojúhelníku, využívá velikosti vnitřních úhlů. Tento postup vyžaduje znalost goniometrických funkcí a jejich základních vlastností. Pro  $\triangle ABC$ , jeho strany  $a, b, c$  a odpovídající úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  platí:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha. \quad ([37], \text{ s. 448})$$



Obrázek 4.18: Odvození výpočtu pomocí funkce sin

Tento vzorec lze dokázat například vhodnou úpravou základního vzorce pro výpočet trojúhelníku pomocí strany a výšky. Důkaz provedeme například pro

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha.$$

Sestrojíme výšku  $v_c$ . Z definice goniometrických funkcí víme, že  $\sin$  úhlu v pravoúhlém trojúhelníku odpovídá poměru stran protilehlé ku přeponě, z  $\triangle APC$  tak plyne  $\sin \alpha = \frac{v_c}{b}$ .

Z tohoto vztahu odvodíme

$$v_c = b \cdot \sin \alpha.$$

Nyní vezmeme základní vzorec pro obsah trojúhelníku (viz 4.5) a výšku nahradíme odvozenou rovností, tedy

$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha.$$

Obdobně lze cyklickou záměnou dokázat tvrzení pro zbylé dva vnitřní úhly ([2]).

## 4.7 Heronův vzorec

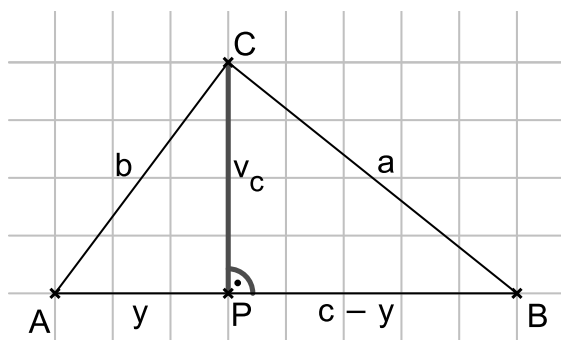
Heronův vzorec z dílny řeckého matematika Herona Alexandrijského, jemuž je věnována sekce 3.3.6, umožňuje určit obsah trojúhelníku, pokud známe velikost jeho tří stran. Výpočet provádíme následovně:

$$S = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)},$$

kde  $s = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$  ([37], s. 448).

Toto tvrzení lze dokázat mnoha různými způsoby. Různými důkazy se zabývají mnozí autoři článků pro časopis Učitel matematiky. Například František Kuřina ([27], s. 16-17) důkaz provádí přes kosinovu větu, Pavel Leischner ([28], s. 230-233) pracuje s trojúhelníkem, jehož všechny tři strany leží na tečnách k dané kružnici. V této práci si uvedeme důkaz využívající vlastnosti pravoúhlého trojúhelníku a znalost výpočtu obsahu trojúhelníku pomocí strany a výšky. ([24])

Označím si v  $\triangle ABC$   $v_c$  výšku na stranu  $c$ ,  $P$  jako patu výšky  $v_c$ , dále velikosti  $y = |AP|$  a  $c - y = |PB|$  (viz obr. 4.19).



Obrázek 4.19: Označení pro důkaz Heronova vzorce

$\triangle APC$  a  $\triangle PBC$  jsou oba pravoúhlé s pravým úhlem u vrcholu  $P$ . Podle Pythagorovy věty platí:

$$\begin{aligned} b^2 &= v_c^2 + y^2 \\ a^2 &= v_c^2 + (c - y)^2. \end{aligned}$$

Z obou rovnic vyjádřím  $v_c^2$

$$\begin{aligned} v_c^2 &= b^2 - y^2 \\ v_c^2 &= a^2 - c^2 + 2cy - y^2 \end{aligned}$$

a položím pravé strany do rovnosti:

$$b^2 - y^2 = a^2 - c^2 + 2cy - y^2.$$

Odtud vyjádřím  $y$  jako

$$y = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}.$$

Pozn. Dělit mohou díky tomu, že  $c$  zastupuje velikost strany, která je vždy nenulové číslo.

Tento výraz pro  $y$  dosadím do rovnice pro  $v_c^2$ :

$$\begin{aligned}
v_c^2 &= b^2 - \left( \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c} \right)^2 \\
&= \frac{(2bc)^2 - (b^2 - a^2 + c^2)^2}{4c^2} \\
&= \frac{(2bc - b^2 + a^2 - c^2) \cdot (2bc + b^2 - a^2 + c^2)}{4c^2} \\
&= \frac{[a^2 - (b - c)^2] \cdot [(b + c)^2 - a^2]}{4c^2} \\
&= \frac{(a - b + c) \cdot (a + b - c) \cdot (b + c - a) \cdot (b + c + a)}{4c^2} \\
&= \frac{(2s - 2b) \cdot (2s - 2c) \cdot (2s - 2a) \cdot 2s}{4c^2} \\
&= \frac{16 \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) \cdot s}{4c^2} \\
&= \frac{4 \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) \cdot s}{c^2}
\end{aligned}$$

kde  $s$  značí poloviční obvod, tedy  $s = \frac{a+b+c}{2}$ .

$v_c^2$  můžu odmocnit, jelikož výraz je jistě kladný.  $v_c$  se tedy rovná:

$$v_c = \frac{\sqrt{4 \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) \cdot s}}{c}.$$

Nyní použiji vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku pomocí strany a výšky a dosadím do něj  $v_c$ :

$$\begin{aligned}
S &= \frac{c \cdot v_c}{2} \\
&= \frac{c}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) \cdot s}}{c} \\
&= \sqrt{\frac{c^2}{4} \cdot \frac{4 \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) \cdot s}{c^2}} \\
&= \sqrt{(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) \cdot s}.
\end{aligned}$$

## 4.8 Výpočet pomocí poloměru kružnice opsané

Oproti Heronovu vzorci v části 4.7 tento postup vyžaduje navíc kromě velikosti všech tří stran ještě velikost poloměru kružnice opsané  $r$ . Platí:

$$S = \frac{abc}{4r} \quad ([37], \text{ s. 464}).$$

Důkaz tohoto vzorce je poměrně snadný ([37], s. 465). Použijeme obecně platný vztah mezi poloměrem kružnice opsané a velikostí stran a vnitřních úhlů v trojúhelníku. Pro libovolný

trojúhelník platí vztah:

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}, \text{ odtud } \sin \alpha = \frac{a}{2r}.$$

Nyní dosadím  $\sin \alpha$  do vzorce pro výpočet trojúhelníku ze sekce 4.6, tedy:

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \frac{a}{2r} = \frac{abc}{4r}.$$

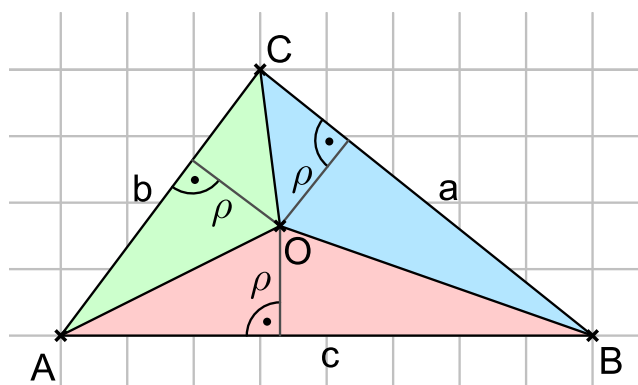
## 4.9 Výpočet pomocí poloměru kružnice vepsané

Obdobně jako výpočet 4.8, i tato metoda vyžaduje kromě znalosti velikosti všech tří stran navíc ještě jednu velikost, tentokrát velikost poloměru kružnice vepsané  $\rho$ .

Pro obsah trojúhelníku platí ([37], s. 464):

$$S = \rho \cdot s, \text{ kde } s = \frac{a + b + c}{2}.$$

Pro důkaz tohoto vztahu si stačí uvědomit ([37], s. 465), že  $\triangle ABC$  je rozdělený na tři nepřekrývající se trojúhelníky,  $\triangle ABO$ ,  $\triangle BCO$  a  $\triangle CAO$  (viz obr. 4.20). Obsah  $\triangle ABC$  lze spočítat jako součet obsahů těchto tří trojúhelníků. Pro ně znám vždy velikost strany a výšky, mohu tak zjistit jejich obsah podle základní metody 4.5.



Obrázek 4.20: Postup výpočtu pomocí  $\rho$

$$S = S_{\triangle BCO} + S_{\triangle CAO} + S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \rho + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \rho + \frac{1}{2} \cdot c \cdot \rho = \rho \cdot \frac{1}{2} \cdot (a + b + c) = \rho \cdot s.$$

Velikost  $\rho$  můžeme dostat zadanou. Pokud ne, lze ji vypočítat, pro její odvození stačí využít Heronův vzorec, popsany a dokázaný v sekci 3.3.6. V této části jsme určili obsah  $S = \rho \cdot s$ , Heronův vzorec počítá obsah takto:

$$S = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}.$$

Obsahy se sobě musí rovnat, tedy mohu vytvořit rovnost

$$\rho \cdot s = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}.$$



Vydělením  $s$ , které značí velikost strany a je tím pádem jistě nenulové, dostáváme vztah pro výpočet  $\rho$  pomocí velikosti stran trojúhelníku, a to:

$$\rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

kde  $s$  rozumíme poloviční obvod trojúhelníku, stejně jako v sekci 4.7.

## 4.10 L'Huillierovy vzorce

Počítání obsahů je již od starověku úzce spjato s geodetickou praxí. Dnešní geodézie používá více postupů, mezi nimi například výpočet pomocí polárních souřadnic, výpočet pomocí stran a obvodových úhlů (tzv. Mascheroniho konstrukce), nebo také L'Huillierovy vzorce, které v této práci uvádím.

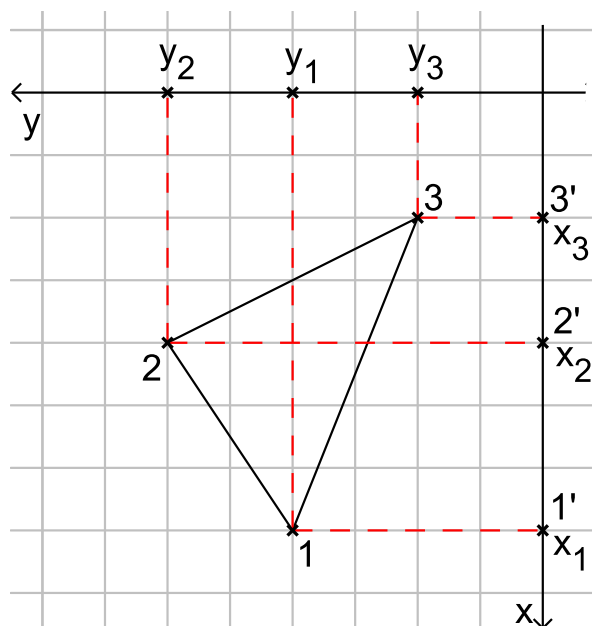
L'Huillierův postup lze použít, jsou-li vrcholy mnohoúhelníku zadány pravoúhlými souřadnicemi. Pro matematiky zvyklé pracovat s kartézskou soustavou souřadnic může být tento postup poněkud náročný, geodetické záznamy totiž používají jiný souřadnicový systém. V porovnání s kartézskou soustavou je v této soustavě souřadnic prohozené označení vertikální a horizontální osy, nezvyklé je též umístění kladné a záporné poloosy.

Osa  $X$  souřadnicového systému odpovídá směru poledníků, směřuje od severu k jihu, v záznamu tedy znázorňuje osu vertikální a kladná poloosa směřuje dolů. Hodnoty osy  $X$  odpovídají zeměpisné šířce. Kolmice k této ose, osa  $Y$ , označuje souřadnice zeměpisné délky, její kladná osa směřuje na západ, tedy v záznamu směrem doleva. Počátek této soustavy, nazývaný trigonometrickým bodem, byl určen podle polohy základního poledníku. Jednotlivé země si však souřadnicový systém upravovaly.

Pro naše území byly původně používány dva souřadnicové systémy. Pro první z nich byl trigonometrickým bodem Gusterberg v Horních Rakousích a používá se pro území Čech. Pro území Moravy a Slezska byl uplatňován systém, jehož trigonometrický bod je věž sv. Štěpána ve Vídni. V průběhu dalších let se souřadnicový systém pro území České republiky sjednotil, existuje též přesná transformační rovnice pro převod souřadnic mezi systémem využívaným v České republice a systémem ETRF-89 platným pro celou Evropu. ([51])

Prvním úkolem při výpočtu obsahu mnohoúhelníku se tak stává zakreslení vrcholů zadaných kartézskými souřadnicemi do souřadnicového systému popsaného výše. Pro potřeby této práce opět aplikujeme metodu na výpočet obsahu trojúhelníku. Metoda využívá podobný princip jako postup ze sekce 4.3, kdy nejprve vypočítáme obsah obrazce většího, než potřebujeme, a postupně od něj výměry odečítáme.

Postup si můžeme ukázat na trojúhelníku  $\triangle 123$  na obrázku 4.21. Obsah  $\triangle 123$  spočítáme jako rozdíl tzv. kladných a záporných lichoběžníků. Kladnými lichoběžníky jsou v tomto případě lichoběžníky  $322'3'$  a  $211'2'$ , a to proto, že obsahují část plochy trojúhelníku. Záporným je lichoběžník  $311'3'$ , jelikož leží vně daného trojúhelníku. Obsahy jednotlivých lichoběžníků lze spočítat ze vzorce  $S = \frac{a+c}{2} \cdot v$ , kde  $a$  a  $c$  jsou velikosti základů a  $v$  výška lichoběžníku ([37], s. 448).



Obrázek 4.21:  $\triangle$  připravený pro užití l'Huilierových vzorců

Celkový obsah zadaného trojúhelníku pak určíme tak, že sečteme obsahy kladných lichoběžníků a odečteme od nich obsahy těch záporných, tedy:

$$\begin{aligned} S &= S_{322'3'} + S_{211'2'} - S_{311'3'} \\ &= \frac{1}{2}(y_2 + y_3) \cdot (x_2 - x_3) + \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \cdot (x_1 - x_2) - \frac{1}{2}(y_1 + y_3) \cdot (x_1 - x_3) \end{aligned}$$

Pro lepší přehlednost vynásobíme celou rovnici dvěma:

$$2S = (y_2 + y_3) \cdot (x_2 - x_3) + (y_1 + y_2) \cdot (x_1 - x_2) - (y_1 + y_3) \cdot (x_1 - x_3)$$

Po roznásobení závorek dostaneme tvar

$$2S = y_2x_2 - y_2x_3 + y_3x_2 - y_3x_3 + y_1x_1 - y_1x_2 + y_2x_1 - y_2x_2 - y_1x_1 + y_1x_3 - y_3x_1 + y_3x_3$$

Součiny  $x$  a  $y$  se stejnými indexy se odečtou

$$2S = -y_2x_3 + y_3x_2 - y_1x_2 + y_2x_1 + y_1x_3 - y_3x_1$$

a zbylé členy seřadím nejprve podle  $x$  a poté podle  $y$ .

$$\text{Podle } x: 2S = x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2)$$

$$\text{Podle } y: 2S = y_1 \cdot (x_3 - x_2) + y_2 \cdot (x_1 - x_3) + y_3 \cdot (x_2 - x_1)$$

Obecně pro  $n$ -úhelník platí zápis pomocí sumace, a to:

$$\sum x_n \cdot (y_{n+1} - y_{n-1}) \text{ podle } x,$$

$$\sum y_n \cdot (x_{n-1} - x_{n+1}) \text{ podle } y.$$

Dvojitý výpočet, přes  $x$  i přes  $y$ , slouží jako kontrola.

Pro výpočet obsahu libovolného mnohoúhelníku je třeba dodržet několik základních pravidel, z nich jmenujme tato:

- obrazec musí být uzavřený a jeho vrcholy označeny po směru hodinových ručiček (při označení v opačném směru vyjde obsah záporný), přičemž 1 přiřadím vrchol s největší hodnotou na pozici  $x$  souřadnice.
- souřadnice si vhodně zredukuji (tzn. od  $x$  souřadnic a od  $y$  souřadnic všech vrcholů mnohoúhelníku odečtu vždy stejné číslo). Tato redukce vlastně značí posunutí daného objektu směrem k osám souřadnic. Tímto posunutím se obsah objektu nezmění. Redukce je nutná, jelikož se při geodetických výpočtech pracuje se souřadnicemi v řádu statisíců. Pokud například dostaneme souřadnice dvou bodů  $A = [729\ 732, 1\ 120\ 043]$  a  $B = [729\ 784, 1\ 120\ 053]$ , můžeme od souřadnic na pozici  $x$  obou bodů odečíst hodnotu 729 700 a od souřadnic na pozici  $y$  odečíst 1 120 000. Souřadnice zredukovaných bodů jsou  $A' = [32, 43]$  a  $B' = [84, 53]$ , což následný výpočet značně zjednoduší.

([30], [53], [55])

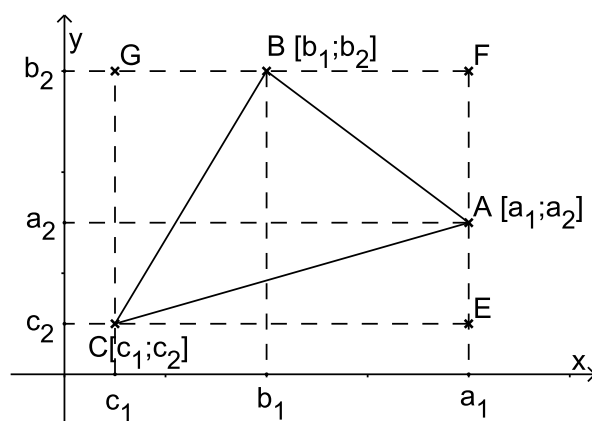
## 4.11 Výpočet pomocí souřadnic vrcholů

V této části si představíme další metodu výpočtu obsahu trojúhelníku, kterou použijeme ve chvíli, kdy známe souřadnice jeho vrcholů. Metoda využívá znalost výpočtu determinantu matice, do které dosadíme souřadnice vrcholů trojúhelníku.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Vzorec lze nahlédnout velice snadno, a to použitím metody rámování (4.3).

Jak vidíme na obrázku 4.22 ([47], s. 29), trojúhelník  $ABC$  je ohraničen čtyřúhelníkem  $CEFG$ , jehož strany jsou  $|CE| = a_1 - c_1$  a  $|EF| = b_2 - c_2$ . Podle metody rámování od obsahu čtyřúhelníku odečteme postupně obsahy všech trojúhelníků vzniklých mezi hranicemi čtyřúhelníku a daného trojúhelníku. Velikosti jejich stran si též vyjádřím jako rozdíl souřadnic bodů  $A$ ,  $B$ , a  $C$ .



Obrázek 4.22: Důkaz pomocí metody rámování

Obsah  $\triangle ABC$  se pak rovná:

$$\begin{aligned}
S_{\triangle ABC} &= S_{CEFG} - S_{\triangle CEA} - S_{\triangle CBG} - S_{\triangle AFB} \\
&= (a_1 - c_1)(b_2 - c_2) - \frac{(a_1 - c_1)(a_2 - c_2)}{2} - \frac{(b_1 - c_1)(b_2 - c_2)}{2} - \frac{(a_1 - b_1)(b_2 - a_2)}{2} \\
&= \frac{1}{2}(a_1b_2 - a_1c_2 - b_2c_1 + c_1a_2 + b_1c_2 - b_1a_2) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Tento postup platí pro speciální polohu trojúhelníku tak, jak je označen na obr. 4.22. Konečtní důkaz této metody můžeme opět provést pomocí základního vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku (viz 4.5), kdy výšku určíme pomocí nástroje analytické geometrie pro výpočet vzdálenosti bodu od přímky ([47] s. 30).

Mějme dán  $\triangle ABC$ , kde vrcholy mají souřadnice  $A[a_1, a_2]$ ,  $B[b_1, b_2]$ ,  $C[c_1, c_2]$  a  $v_c$  je výška na stranu  $c$ . Směrový vektor přímky  $AB$  má souřadnice  $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ , normálový vektor přímky  $AB$  pak  $(a_2 - b_2, b_1 - a_1)$ . Obecná rovnice přímky má tvar

$$(a_2 - b_2)x + (b_1 - a_1)y + d = 0.$$

Na přímce  $AB$  leží bod  $A$ , po dosazení souřadnic bodu  $A$  do rovnice přímky postupně získáme hodnotu  $d$  a tedy obecnou rovnici přímky  $AB$ , vyjádřenou pomocí souřadnic vrcholů  $A$  a  $B$ :

$$\begin{aligned}
(a_2 - b_2)a_1 + (b_1 - a_1)a_2 + d &= 0 \\
d &= b_2a_1 - b_1a_2 \\
(a_2 - b_2)a_1 + (b_1 - a_1)a_2 + b_2a_1 - b_1a_2 &= 0
\end{aligned}$$

Velikost výšky  $v_c$  dopočítáme použitím vzorce pro vzdálenost bodu od přímky, v našem případě bodu  $C$  od přímky  $AB$ :

$$v_c = \frac{|(a_2 - b_2)a_1 + (b_1 - a_1)a_2 + b_2a_1 - b_1a_2|}{\sqrt{(a_2 - b_2)^2 + (b_1 - a_1)^2}}$$

Pro výpočet obsahu trojúhelníku  $ABC$  využijeme základní vzorec  $S = \frac{1}{2}|AB| \cdot v_c$ . Po dosazení a úpravě výrazu dostaneme tvar:

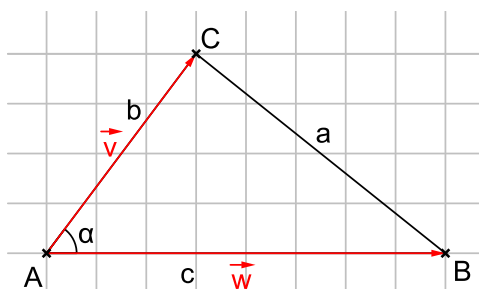
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|a_2c_1 - b_2c_1 + b_1c_2 - a_1c_2 + b_2a_1 - b_1a_2| = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Můžeme si všimnout, že roznásobený tvar determinantu matice při vhodném přeznačení souřadnic odpovídá výpočtu pomocí l'Huillierových vzorců, kde platí

$$2S = -y_2x_3 + y_3x_2 - y_1x_2 + y_2x_1 + y_1x_3 - y_3x_1.$$

## 4.12 Výpočet pomocí vektorového součinu

Tato metoda se od ostatních postupů uvedených v této kapitole liší tím, že umožňuje výpočet obsahu trojúhelníku umístěného libovolně v prostoru, ne pouze v rovině. Pro výpočet je nutné znát pouze souřadnice dvou vektorů, které mají společný počáteční bod a představují tak dvě strany trojúhelníku.



Obrázek 4.23: Užití vektorového součinu pro výpočet  $S_{\Delta}$

Podle této metody se, dodržíme-li označení na obrázku 4.23, obsah rovná

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{w} \times \vec{v}|$$

Při důkazu tohoto tvrzení lze postupovat například takto ([47], s. 75):

$$\begin{aligned} (\vec{w} \times \vec{v})^2 &= \begin{vmatrix} w_2 & w_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} w_1 & w_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (w_1v_1 + w_2v_2 + w_3v_3)^2 \\ &= |\vec{w}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{w} \cdot \vec{v})^2 \\ &=^* |\vec{w}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= |\vec{w}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Rovnost označená hvězdičkou v posledním řádku plyne ze vztahu dvou vektorů, jejich velikostí a úhlu, který svírají, a to:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}.$$

Z odmocnění odvozené rovnosti plyne

$$|\vec{w} \times \vec{v}| = |\vec{w}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha.$$

Ze sekce 4.6 víme, že obsah trojúhelníku počítaný pomocí funkce sinus je roven

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha.$$

Dosazením odvozeného vztahu vektorového součinu s velikostí vektorů a úhlem  $\sin \alpha$  tak dostáváme

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{w} \times \vec{v}|.$$

## 4.13 Užití určitého integrálu

Integrály se zdají být na výpočet obsahu trojúhelníku příliš složitým nástrojem, tato metoda je opravdu náročná na vzdělání žáka, vyžaduje schopnost práce s integrály (ačkoli výpočty obsahují jen nejzákladnější z tabulkových integrálů). Zařazení tohoto postupu do výuky však má své opodstatnění. Výpočet obsahu trojúhelníku může sloužit jako ověření, že určitý integrál pro výpočet obsahů obecně funguje. Při určování ploch pod křivkami už přesnost jinými dostupnými metodami těžko ověříme, u trojúhelníku tuto možnost máme.

Pro výpočet obsahu trojúhelníku pomocí určitých integrálů je nutné znát rovnice přímek (resp. předpisy funkcí, jimž jsou tyto přímky grafem), na kterých leží strany trojúhelníku, a také souřadnice  $x$  jejich průsečíků, které tvoří meze jednotlivých integrálů.

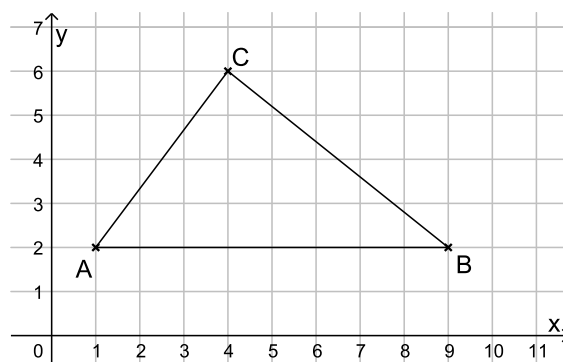
Postupujeme poté velmi podobně jako u L'Huillierových vzorců (4.10), kdy postupně spočítáme plochy tří dílčích útvarů a pak je přičteme, resp. odečteme, podle toho, zda se dané plochy alespoň částečně překrývají se zadaným trojúhelníkem, či nikoli. Podrobnější popis metody se nachází v části aplikace metod, sekce 5.12, kde je postup ukázán na konkrétním příkladu.

Výhodou této metody je, že je použitelná na široké spektrum trojúhelníků, jichž vrcholy nemusí být mřížovými body. Pro postup stačí znát předpisy tří přímek, na nichž strany trojúhelníku leží. Vrcholy se poté dají dopočítat pomocí postupů analytické geometrie jako průsečíky každých dvou přímek. Nevýhodou metody je, že je v každém příkladu zvlášť potřeba určit útvary, jichž obsah je nutné přičíst, a ty, jichž obsah je nutné odečíst. Problém nastává také v případě, kdy se trojúhelník nenachází pouze nad osou  $x$ . Z definice Riemannova integrálu se totiž plocha pod grafem funkce pod osou  $x$  ve výpočtu odečítá. To však lze vyřešit vhodným posunutím obrazce.

# Kapitola 5

## Aplikace metod

V této části budou všechny metody z kapitoly 4 aplikovány na jeden konkrétní trojúhelník  $ABC$ , znázorněný na následujícím obrázku. Souřadnice vrcholů v kartézské soustavě jsou zadány  $A[1, 2]$ ,  $B[9, 2]$  a  $C[4, 6]$ :

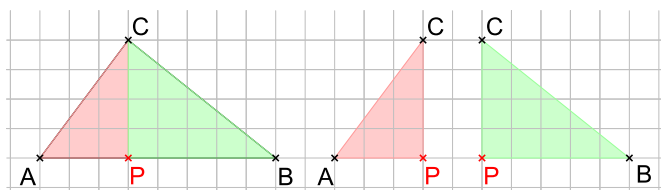


Obrázek 5.1:  $\triangle ABC$  zvolený pro demonstraci jednotlivých metod

Ne pro všechny metody je toto zadání výhodné. Použití všech metod na stejném trojúhelníku má ale tu výhodu, že srovnání jednotlivých přístupů bude snazší a objektivnější. Pro všechny postupy budeme počítat s délkou strany jednotkového čtverce  $1\text{ cm}$ , a tedy s obsahem jednotkového čtverce  $1\text{ cm}^2$ .

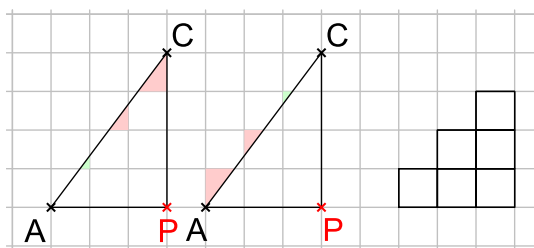
### 5.1 Metoda rozřezávání a určování počtu čtverců

Jelikož zadáný trojúhelník není pravoúhlý, spojíme první dvě metody v jednom výpočtu. Nejdříve daný trojúhelník rozřízneme na dva pravoúhlé



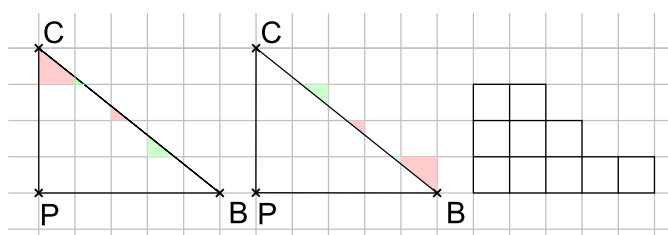
Obrázek 5.2: Rozdělení na dva pravoúhlé trojúhelníky,  $APC$  a  $PBC$

a poté určíme obsah každého jednou z metod 4.1 a 4.2. Spočítáme počet celých čtverců, jež trojúhelník  $ABC$  zaobírá, a ne celé části se snažíme poskládat do sebe. Obsah trojúhelníku  $APC$  určíme postupem znázorněným na obrázku 5.3 na  $S_{\triangle APC} = 6 \text{ cm}^2$ ,



Obrázek 5.3: Obsah trojúhelníku  $APC$

obsahu  $\triangle PBC$ , jak je vykresleno na obrázku 5.4, odpovídá  $S_{\triangle PBC} = 10 \text{ cm}^2$ .



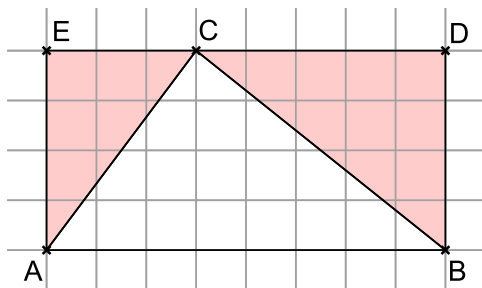
Obrázek 5.4: Obsah trojúhelníku  $PBC$

Obsah obou trojúhelníků bychom také mohli určit nahlédnutím, že  $APC$  tvoří polovinu obdélníku o stranách 3 a 4 a jeho obsah je tedy  $S_{\triangle APC} = 6 \text{ cm}^2$  a že  $PBC$  tvoří polovinu obdélníku o stranách 5 a 4 a jeho obsah  $S_{\triangle BPC} = 10 \text{ cm}^2$ .

Obsah zadaného trojúhelníku je tedy  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APC} + S_{\triangle PBC} = 6 + 10 = 16 \text{ cm}^2$ .

## 5.2 Metoda rámování

Jak je popsáno v sekci 4.3, trojúhelník  $ABC$  ohraničíme nejmenším možným pravidelným čtyřúhelníkem, tj. v tomto případě obdélník  $ABDE$ .



Obrázek 5.5: Trojúhelník  $ABC$  orámovaný obdélníkem  $ABDE$

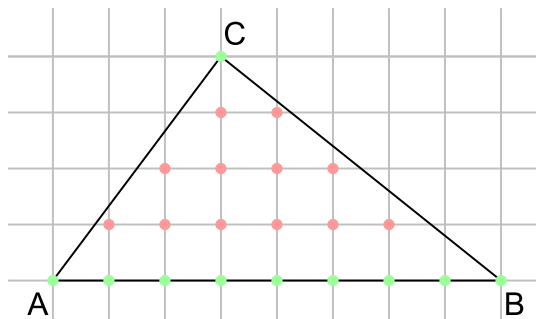
Obsah  $\triangle ABC$  pak spočítáme jako rozdíl obsahu obdélníku  $ABDE$  a součtu obsahů trojúhelníků  $ACE$  a  $BDC$ :

$$S_{\triangle ABC} = S_{ABDE} - (S_{\triangle ACE} + S_{\triangle BDC}) = 32 - 6 - 10 = 16 \text{ cm}^2.$$



## 5.3 Pickova formule

Pro určení obsahu pomocí Pickovy formule nepotřebuji žádné údaje délek, nemusím trojúhelník nijak upravovat. Stačí určit počet mřížových bodů ležících na hranici  $\triangle ABC$  a mřížových bodů ležících uvnitř tohoto trojúhelníku.



Obrázek 5.6: Vnitřní a hraniční mřížové body

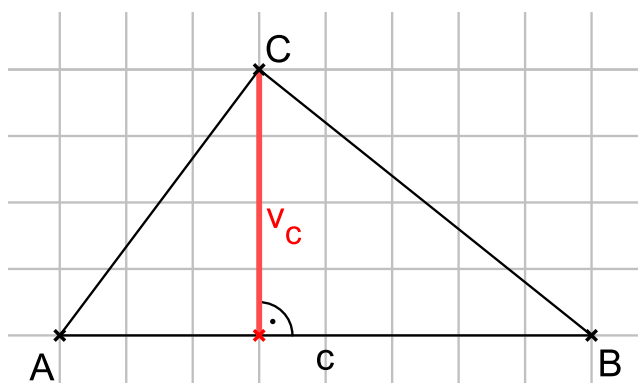
Podle označení zavedeného v sekci 4.4 se počet hraničních bodů rovná  $H = 10$  a počet vnitřních bodů je  $V = 12$ .

Dosazením do vzorce získám obsah

$$S_{\triangle ABC} = V + \frac{H}{2} - 1 = 12 + \frac{10}{2} - 1 = 16 \text{ cm}^2.$$

## 5.4 Základní vzorec - použití strany a výšky

Tato metoda už je na zadání náročnější, v tomto konkrétním případě  $\triangle ABC$  však stále není třeba nic dopočítávat. Z obrázku lze určit velikost strany  $c = 8 \text{ cm}$  a velikost  $v_c = 4 \text{ cm}$

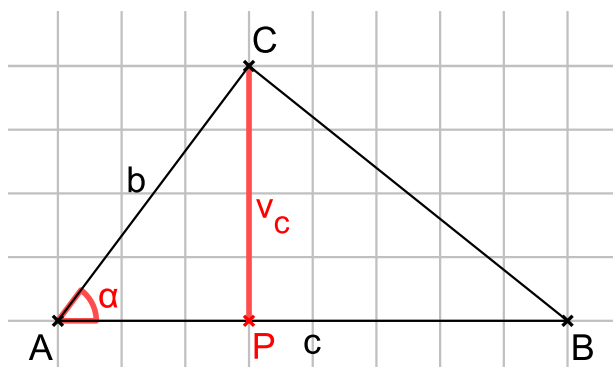


Obrázek 5.7: Základní vzorec - strana x výška

a dosazením do vzorce získáme hodnotu obsahu

$$S_{\triangle ABC} = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16 \text{ cm}^2.$$

## 5.5 Využití goniometrické funkce sinus



Obrázek 5.8: Výpočet pomocí funkce sinus

K tomuto postupu potřebujeme znát velikost dvou stran trojúhelníku a jimi svíraného úhlu, resp. hodnotu  $\sin$  tohoto úhlu.

Z pravoúhlého  $\triangle APC$ , kde  $P$  je pata výšky  $v_c$ , můžeme snadno určit velikost strany  $b$ , a to pomocí Pythagorovy věty. Odvěsny tohoto trojúhelníku mají velikosti  $a = 3$  a  $v_c = 4$ . Přepona  $b = 5$ , jelikož čísla 3, 4 a 5 jsou pythagorejskou trojicí.

Z pravoúhlého  $\triangle APC$  (dodržíme-li označení na obrázku 5.8) lze dále vyjádřit hodnotu  $\sin \alpha$ , a to:

$$\sin \alpha = \frac{v_c}{b} = \frac{4}{5}.$$

Obsah trojúhelníku  $ABC$  tedy podle vzorce z části 4.6 je roven

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{4}{5} = 16 \text{ cm}^2.$$

## 5.6 Heronův vzorec

Pro použití Heronova vzorce je nutné znát všechny 3 strany trojúhelníku.

V námi zadaném trojúhelníku  $ABC$  lze z obrázku snadno vyčíst pouze stranu  $c = 8$ . Velikost strany  $b = 5$  jsme dopočítali v části 5.5. Velikost strany  $a$  určíme pomocí Pythagorovy věty pro  $\triangle APC$ .

$$a = \sqrt{v_c^2 + |PB|^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}.$$

Pro výpočet pomocí Heronova vzorce ještě potřebuji znát hodnotu  $s$ , kterou definuji jako poloviční obvod, tedy:

$$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{\sqrt{41} + 5 + 8}{2} = \frac{13 + \sqrt{41}}{2}$$

Nyní už můžu dosadit do Heronova vzorce  $S_{\triangle ABC} = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$ :

$$\begin{aligned}
S_{\triangle ABC} &= \sqrt{\frac{13 + \sqrt{41}}{2} \cdot \left(\frac{13 + \sqrt{41}}{2} - \sqrt{41}\right) \cdot \left(\frac{13 + \sqrt{41}}{2} - 5\right) \cdot \left(\frac{13 + \sqrt{41}}{2} - 8\right)} \\
&= \sqrt{\frac{13 + \sqrt{41}}{2} \cdot \frac{13 - \sqrt{41}}{2} \cdot \frac{3 + \sqrt{41}}{2} \cdot \frac{-3 + \sqrt{41}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{169 - 41}{4} \cdot \frac{41 - 9}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{128 \cdot 32}{16}} \\
&= \sqrt{256} = 16 \text{ cm}^2.
\end{aligned}$$

Na tomto příkladu je vidět, že tato metoda je výhodná ve chvíli, kdy v zadání dostaneme velikosti všech tří stran  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , kterými budou celá čísla, maximálně čísla racionální, vyjádřená nejlépe zlomky. V případě tohoto  $\triangle ABC$  je použití Heronova vzorce složitější a vyžaduje znalost úpravy výrazů s odmocninami, další zjednodušení přinese také znalost vzorce  $A^2 - B^2$ . Studenti by s velkou pravděpodobností v úpravě výrazu chybovali. Na druhou stranu příklad může posloužit jako demonstrace toho, že i „nehezké“ výrazy s mnoha odmocninami mohou dojít k „hezkému“ výsledku.

## 5.7 Výpočet pomocí poloměru kružnice opsané

Poloměr kružnice opsané lze zjistit ze vztahu uvedeného v části 4 v sekci 4.8, tj.

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha}.$$

Hodnotu  $\sin \alpha$  jsem již vypočítala v aplikaci metody využití goniometrické funkce  $\sin$  v sekci 5.5, mohu tedy rovnou použít  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ . Poloměr kružnice opsané je:

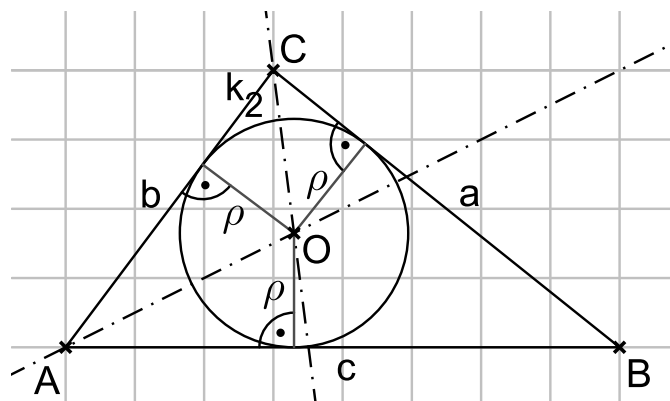
$$r = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{41}}{2 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{5 \cdot \sqrt{41}}{8}.$$

Podle vzorce 4.8 pak obsah dopočítáme následovně:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4r} = \frac{\sqrt{41} \cdot 5 \cdot 8}{4 \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{41}}{8}} = 16 \text{ cm}^2.$$

## 5.8 Výpočet pomocí poloměru kružnice vepsané

V tomto případě zadání je postup poněkud složitější. Vycházím ze značení v tomto obrázku:



Obrázek 5.9: Kružnice vepsaná trojúhelníku

Nejprve musím spočítat hodnotu  $\rho$  - poloměr kružnice vepsané, a to ze vztahu popsaneho v části 4.9:

$$\begin{aligned}
 \rho &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \\
 &= \sqrt{\frac{\left(\frac{13+\sqrt{41}}{2} - \sqrt{41}\right) \cdot \left(\frac{13+\sqrt{41}}{2} - 5\right) \cdot \left(\frac{13+\sqrt{41}}{2} - 8\right)}{\frac{13+\sqrt{41}}{2}}} \\
 &= \sqrt{\frac{\frac{13-\sqrt{41}}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{41}}{2} \cdot \frac{-3+\sqrt{41}}{2} \cdot 2}{13+\sqrt{41}}} \\
 &= \sqrt{\frac{\frac{41-9}{4} \cdot \frac{(13-\sqrt{41})}{2} \cdot \frac{2}{13+\sqrt{41}} \cdot \frac{13-\sqrt{41}}{13-\sqrt{41}}}{13+\sqrt{41}}} \\
 &= \sqrt{\frac{32}{4 \cdot (169-41)}} \cdot \sqrt{(13-\sqrt{41})^2} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot (13-\sqrt{41})
 \end{aligned}$$

Dále také použiji hodnotu  $s = \frac{13+\sqrt{41}}{2}$ , se kterou jsem pracovala v aplikaci Heronova vzorce v sekci 5.6. Dosadím  $\rho$  a  $s$  do vzorce a dopočítám obsah  $\triangle ABC$ :

$$S_{\triangle ABC} = \rho \cdot s = \frac{1}{4} \cdot (13-\sqrt{41}) \cdot \frac{13+\sqrt{41}}{2} = \frac{1}{8} \cdot (169-41) = \frac{1}{8} \cdot 128 = 16 \text{ cm}^2$$

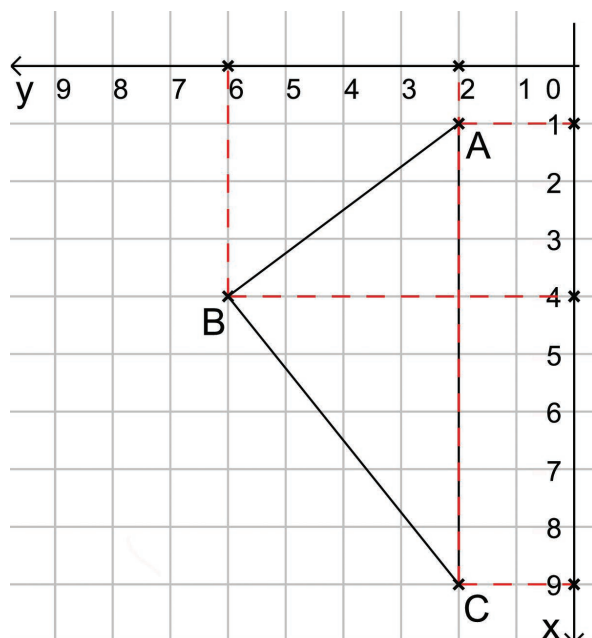
Tato metoda je opět velice nevýhodná, pokud neznám poloměr kružnice vepsané přímo ze zadání, jelikož jen dopočítání  $\rho$  je velice náročné a vyžaduje praxi v počítání s odmocninami. Na postupu jsou však dobře pozorovatelné vztahy mezi jednotlivými elementy v trojúhelníku, stejně jako je zřejmá provázanost jednotlivých metod a hodnot, které v nich používám.

## 5.9 L'Huillierovy vzorce

Souřadnice vrcholů odpovídají těm, které jsou v zadání kapitoly 5. Na obr. 5.10 je trojúhelník  $ABC$  zakreslený do souřadnicového systému využívaného v geodetické praxi. Jak

bylo popsáno v teoretickém úvodu k l'Huillierovým vzorcům (viz 4.10), vrcholy je dále nutné správně očíslovat. 1 označím vrchol  $C$ , jelikož jeho souřadnice  $x$  je větší než zbylých dvou vrcholů, a poté čísluji po směru hodinových ručiček, tedy  $B$  jako vrchol 2 a  $A$  jako vrchol 3. Souřadnice bodů tak, jak je dosadím do vzorce, tedy vypadají takto:

$$C[9, 2] = [x_1, y_1], B[4, 6] = [x_2, y_2], A = [1, 2] = [x_3, y_3]$$



Obrázek 5.10: Aplikace l'Huillierových vzorců

Jak je vysvětleno v sekci 4.10, obsah útvaru se pro kontrolu počítá dvakrát, a to podle osy  $x$  a podle osy  $y$ . Podle osy  $x$  bude výpočet vypadat následovně:

$$\begin{aligned} 2S_{\triangle ABC} &= x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2) \\ &= 9 \cdot (6 - 2) + 4 \cdot (2 - 2) + 1 \cdot (2 - 6) \\ &= 9 \cdot 4 - 4 = 32 \\ S_{\triangle ABC} &= 16 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Podle  $y$  takto:

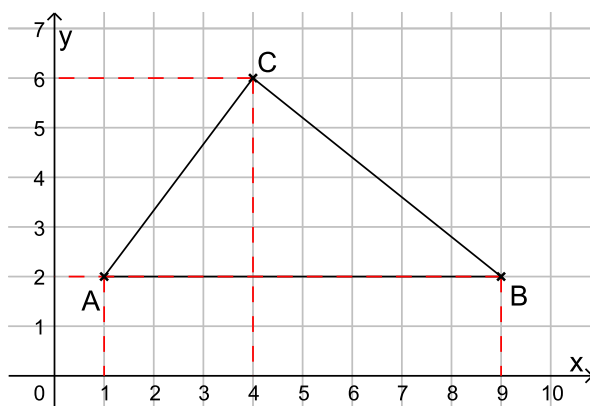
$$\begin{aligned} 2S_{\triangle ABC} &= y_1 \cdot (x_3 - x_2) + y_2 \cdot (x_1 - x_3) + y_3 \cdot (x_2 - x_1) \\ &= 2 \cdot (1 - 4) + 6 \cdot (9 - 1) + 2 \cdot (4 - 9) \\ &= -6 + 48 - 10 = 32 \\ S_{\triangle ABC} &= 16 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Výsledky při postupu přes  $x$  i přes  $y$  se rovnají, zkontrolovali jsme tak, že  $S_{\triangle ABC} = 16 \text{ cm}^2$ .

## 5.10 Výpočet pomocí souřadnic vrcholů

Tento postup je opět z těch jednodušších, vyžaduje však znalost matic a výpočtu determinantu.

Kartézské souřadnice vrcholů trojúhelníku  $A[1, 2]$ ,  $B[9, 2]$ ,  $C[4, 6]$  jsem uvedla v zadání kapitoly 5. Pokud by zadané nebyly, mohu je zjistit podle postupu uvedeném v sekci 2.3.2 pomocí rovnoběžek s osami  $x$  a  $y$ , jak je naznačeno na obrázku 5.11.

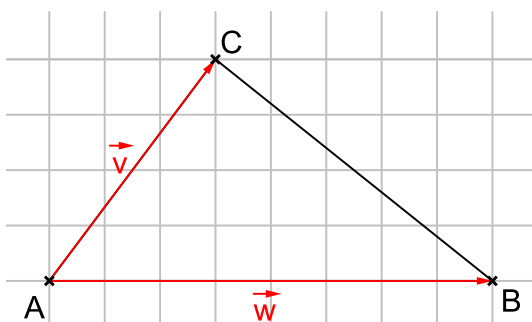


Obrázek 5.11: Určení souřadnic pomocí rovnoběžek s osami

Pro výpočet obsahu trojúhelníku stačí souřadnice vrcholů  $A$ ,  $B$ ,  $C$  dosadit do vzorce popsaného v sekci 4.11:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |(2 + 54 + 8 - 8 - 6 - 18)| = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16 \text{ cm}^2$$

## 5.11 Výpočet pomocí vektorového součinu



Obrázek 5.12: Vektory pro výpočet obsahu

Pro použití vzorce obsahujícího vektorový součin potřebuji znát souřadnice vektorů  $\vec{w}$  a  $\vec{v}$ , jak jsou značené na obrázku 5.12.

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = [9, 2] - [1, 2] = (8, 0)$$

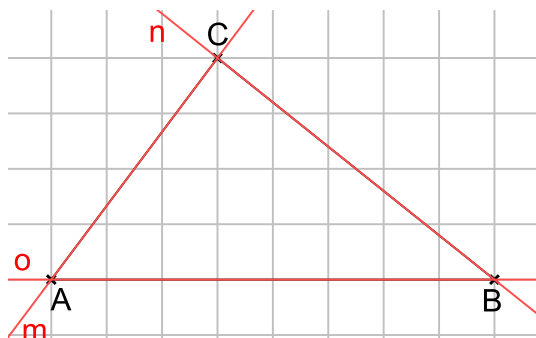
$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = [4, 6] - [1, 2] = (3, 4)$$

Oběma vektorům přidám třetí souřadnici = 0, poté vektory  $\vec{w} = (8, 0, 0)$  a  $\vec{v} = (3, 4, 0)$  dosadím do vzorce:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{w} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} \cdot |(0, 0, 32)| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{32^2} = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16 \text{ cm}^2$$

## 5.12 Užití určitého integrálu

Pro užití této metody potřebujeme znát rovnice přímk, na kterých leží strany trojúhelníku.

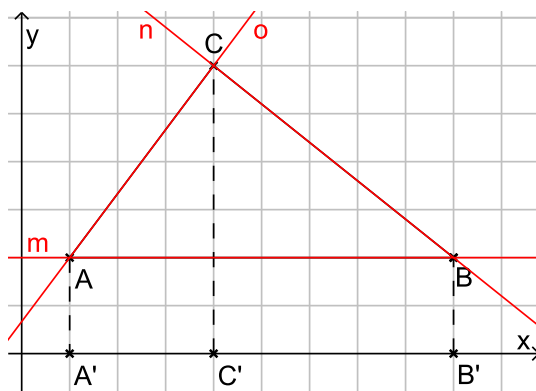


Obrázek 5.13: Přímký obsahující strany  $\triangle ABC$

Použijeme označení přímk na obrázku 5.13, kdy strana  $AB$  leží na přímce  $o$ , strana  $BC$  na přímce  $n$  a strana  $AC$  na přímce  $m$ . Pro výpočet rovnic přímk  $m$ ,  $n$  a  $o$  je nutné sáhnout po nástrojích, které nám nabízí analytická geometrie. Obecné rovnice přímk vychází následovně:

$$\begin{aligned} o : y &= \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \\ n : y &= -\frac{4}{5}x + \frac{46}{5} \\ m : y &= 2 \end{aligned}$$

Pro lepší popsání jednotlivých útvarů, jichž obsahy budu pomocí integrálů dopočítávat, si označím ještě tyto body  $A'$ ,  $B'$  a  $C'$ :



Obrázek 5.14: Označení jednotlivých útvarů

V tomto konkrétním příkladu budu při počítání obsahu trojúhelníku přičítat obsahy lichoběžníků  $A'C'CA$  a  $C'B'BC$  a odečtu obsah obdélníku  $A'B'BA$ .

$$S_{\triangle ABC} = S_{A'C'CA} + S_{C'B'BC} - S_{A'B'BA}$$

Jednotlivé plochy vyjádřím pomocí integrálů a dopočítám obsah:

$$\begin{aligned}
 S_{\triangle ABC} &= \int_1^4 \left( \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \right) dx + \int_4^9 \left( -\frac{4}{5}x + \frac{46}{5} \right) dx - \int_1^9 2dx = \\
 &= \left[ \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x \right]_1^4 + \left[ -\frac{4}{5} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{46}{5}x \right]_4^9 - [2x]_1^9 \\
 &= \frac{2}{3}[x^2 + x]_1^4 + \frac{2}{5}[-x^2 + 23x]_4^9 - [2x]_1^9 \\
 &= \frac{2}{3}(20 - 2) + \frac{2}{5}(126 - 76) - (18 - 2) \\
 &= \frac{2}{3} \cdot 18 + 20 - 16 \\
 &= 16 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$



# Kapitola 6

## Závěr

Cílem této práce bylo rozebrat historii i současnou praxi určování obsahu trojúhelníku. Na začátku představuji definice matematických pojmů, se kterými se při jednotlivých postupech výpočtu obsahu trojúhelníku pracovalo. Nacházejí se zde definice jednotlivých elementů v trojúhelníku a jsou zde popsány jejich základní vlastnosti. Kromě názvosloví spojeného výhradně s trojúhelníkem jsou v první části popsány i další matematické pojmy, jež jsou platné pro širší škálu matematických výpočtů, nejen pro výpočet obsahu trojúhelníku. Pochopení těchto pojmů je zásadní pro další postupy v této práci.

Další část nabízí pohled do historie geometrie v celosvětovém měřítku, tato část zachycuje vývoj matematické vědy posledních několika tisíciletí. V jednotlivých podkapitolách jsem představila důležité postupy i jejich objevitele ze starověkého Egypta, antického Řecka, Číny, Indie a arabských zemí, poslední podkapitola se věnuje moderním matematickým přístupům za posledních 500 let.

Následuje kapitola zaměřená na vybrané přístupy k výpočtu obsahu trojúhelníku, což považuji za těžiště celé práce. Obsahuje metody s různými nároky na vzdělání žáka. Začíná metodami představovanými již žákům prvního stupně, které rozvíjí první představu o pojmu obsahu rovinného útvaru, dále pokračuje přes formalizované vzorečky pro výpočet obsahu, se kterými se žáci mohou setkat během druhého stupně základních škol. Další metody využívají poznatky analytické geometrie či znalost integrálního počtu, s většinou z nich se žáci základních a často ani středních škol nesetkají.

V poslední části jsem pak všechny metody prakticky aplikovala na jeden vybraný trojúhelník  $ABC$ . Konkrétní výpočty tak doplňují teoretické znalosti z předchozí kapitoly a vedou k lepšímu porozumění obecných pravidel.

Domnívám se, že práce splnila vytyčené cíle a přináší přehledný a ucelený pohled na různé metody určování obsahu trojúhelníku, včetně jejich historie.

# Použité informační zdroje

- [1] Al-Chwarizmi. *JW.org: Prebudte sa!* [online]. Květen 2015 [cit. 17.4.2018]. Dostupné z: <https://www.jw.org/sk/publikacie/casopisy/g201505/al-chvarizmi-otec-algebry/>
- [2] Area of a Triangle. *Brilliant / Math & Science* [online]. [cit. 11.4.2018]. Dostupné z: <https://brilliant.org/wiki/triangles-calculating-area/>
- [3] Archimedes and the area of a parabolic segment. *Interactive Mathematics: Learn math while you play with it!* [online]. BOURNE, Murray, 14.12.2008 [cit. 11.4.2018]. Dostupné z: <https://www.intmath.com/blog/mathematics/archimedes-and-the-area-of-a-parabolic-segment-1652>
- [4] BEČVÁŘ, Jindřich. *DML-CZ: Archimédés, Měření kruhu* [online]. Praha: MATFYZPRESS, 2012 [cit. 11.4.2018]. Dostupné z: [https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/402376/DejinyMat\\_54-2012-1\\_6.pdf](https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/402376/DejinyMat_54-2012-1_6.pdf)
- [5] BEČVÁŘ, Jindřich. Několik poznámek o ekvivalenci matematických vět. *Učitel matematiky* [online]. Praha: jednota českých matematiků a fyziků, 2011, roč. 19, č. 3. ISSN 1210 - 9037. Dostupné z: [class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/FileDownload.aspx?FileID=124](http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/FileDownload.aspx?FileID=124)
- [6] Bernhard Riemann. In: *Techmania Science Center: Encyklopedie* [online]. KRÁLOVÁ, Magda. [cit. 12.4.2018]. Dostupné z: <http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1302/riemann>
- [7] BINTEROVÁ, Helena et al. *Matematika 6: Geometrie*. Plzeň: Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-656-7.
- [8] BINTEROVÁ, Helena et al. *Matematika 7: Geometrie*. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-681-9.
- [9] BINTEROVÁ, Helena et al. *Matematika 8: Geometrie*. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-686-4.
- [10] BOČEK, Leo a Jaroslav ZHOUF. *Planimetrie*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7290-594-2.

- [11] BUŠEK, Ivan et al. *Matematika pro gymnázia: Základní poznatky z matematiky*. Vyd. 2. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-85849-34-8.
- [12] Cartesian Coordinates. *Wolfram MathWorld: The Web's Most Extensive Mathematics Resource* [online]. ©1999 [cit. 11.4.2018]. Dostupné z: <http://mathworld.wolfram.com/CartesianCoordinates.html>
- [13] DOSTÁLOVÁ, Marie. *Pickova věta*. Praha, 2013, 40 stran. Dostupné z: [http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/czv/pickova\\_veta.pdf](http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/czv/pickova_veta.pdf). Konzultant závěrečné práce: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta.
- [14] EUKLEIDÉS. *Základy. Knihy I-IV/Eukleides; komentované Petrem Vopěnkou*. Nymburk: OPS, Máchova 1492, 2008. ISBN 80-903773-6-X.
- [15] FOLTA, Jaroslav. *Dějiny matematiky I*. Praha: Národní technické muzeum Praha, 2004. ISBN 80-239-4031-7.
- [16] Georg Alexander Pick. In: *Wikipedia: The Free Encyclopedia* [online]. 27.10.2017 [cit. 11.4.2018]. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Georg\\_Alexander\\_Pick](https://cs.wikipedia.org/wiki/Georg_Alexander_Pick)
- [17] Georg Alexander Pick. *web.math.muni.cz* [online]. FOLTA, Jaroslav. Dostupné z: [https://web.math.muni.cz/biografie/georg\\_pick.html](https://web.math.muni.cz/biografie/georg_pick.html)
- [18] Gottfried Leibniz. In: *Techmania Science Center: Encyklopedie* [online]. KRÁLOVÁ, Magda. [cit. 16.4.2018]. Dostupné z: <http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1234/leibniz>
- [19] HEJNÝ, Milan a Darina JIROTKOVÁ. *Čtverečkovaný papír jako MOST mezi geometrií a aritmetikou*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 1999. ISBN 80-86039-92-7.
- [20] HEJNÝ, Milan a Darina JIROTKOVÁ. Čtverečkovaný papír, trojúhelníky a Pickova formule. *Učitel matematiky*. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, duben 2000, roč. 8, č. 3. ISSN 1210 - 9037.
- [21] HEJNÝ, Milan et al. *Matematika B*. Praha: H-mat, 2015. ISBN 978-80-905756-1-5.
- [22] HERMAN, Jiří et al. *Matematika: sekunda. Trojúhelníky a čtyřúhelníky*. Vyd. 2. Praha: Prometheus, 2006. ISBN 80-7196-332-1.
- [23] HOŠKOVÁ, Šárka et al. *Integrální počet funkcí jedné proměnné* [online]. ©2006 [cit. 11.4.2018]. Dostupné z: <http://www.math.muni.cz/~plch/ip.pdf>
- [24] ISIBALO. 2 - Důkaz (odvození) Heronova vzorce (Planimetrie). In: *Youtube* [online]. 24.12.2015 [cit. 12.4.2018]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=739aBO-dzRk>.

- [25] JUŠKEVIČ, Adolf Pavlovič. *Dějiny matematiky ve středověku*. Praha: Academia, 1978.
- [26] KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*. Překlad Marcela Hedrlínová. Praha: Academia, 1969.
- [27] KUŘINA, František. Heronův vzorec a kosinová věta. *Učitel matematiky*. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, říjen 1997, roč. 6, č. 1. ISSN 1210-9037.
- [28] LEISCHNER, Pavel. Heronův vzorec ještě jednou. *Učitel matematiky*. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, květen 1998, roč. 6, č. 4. ISSN 1210-9037.
- [29] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky: stručná historie královny věd*. Příbram: Pistorius & Olšanská, 2008. ISBN 978-80-87053-16-4.
- [30] MLČKOVÁ, Danuše. *Geodetické výpočty, 2. část* [online]. ©spszememericka, 2008 [cit. 11.4.2018]. Dostupné z: <http://spszem.cz/storage/files/58/Geodetick-vpoty-2.pdf>
- [31] Obsah trojúhelníku. *Matematika pro střední a základní školy - Matematika.cz* [online]. Brno: Nová média, ©2006-2014 [cit. 11.4.2018]. Dostupné z: <https://matematika.cz/obsah-trojuhelniku>
- [32] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník základní školy, 3. díl*. Vyd. 2. Praha: Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-144-2.
- [33] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy, 3. díl*. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-129-9.
- [34] OSTERMANN, Alexander a Gerhard WANNER. *Geometry by Its History*. [online]. Berlin: Springer Science + Business Media, 2012 [cit. 10.4.2018]. Dostupné z: <https://books.google.cz/books?id=eOSqPHwWJX8C&printsec=frontcover&dq=geometry+by+its+history&hl=cs&sa=X&ved=0ahUKEwjeh7L43LDAhWSSsAKHXDWDIAQ6AEIKDAA#v=onepage&q=geometry%20by%20its%20history&f=false>
- [35] Pick biography. *MacTutor History of Mathematics* [online]. O'CONNOR, J.J. a E.F. ROBERTSON. ©August 2005 [cit. 11.4.2018]. Dostupné z: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pick.html>
- [36] POLÁK, Josef. Minkowského metoda měření délek, obsahů a povrchů geometrických útvarů. *MATEMATIKA - FYZIKA - INFORMATIKA: Časopis pro výuku na základních a středních školách* [online]. Praha: Prometheus, 2016, roč. 25, č. 5 [cit. 10.4.2018]. Dostupné z: [http://mfi.upol.cz/files/25/2505/mfi\\_2505\\_321\\_334.pdf](http://mfi.upol.cz/files/25/2505/mfi_2505_321_334.pdf)
- [37] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. Vyd. 3. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1980.

- [38] REICHL, Jaroslav a Martin VŠETIČKA. *Multimediální encyklopedie fyziky: Čínská matematika* [online]. ©2006-2018 [cit. 11.4.2018]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/print/1477-cinska-matematika>
- [39] REICHL, Jaroslav a Martin VŠETIČKA. *Multimediální encyklopedie fyziky: Heron Alexandrijský* [online]. ©2006-2018 [cit. 11.4.2018]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1433-heron-alexandrijsky>
- [40] Rhind Mathematical Papyrus. In: *Wikipedia: The Free Encyclopedia* [online]. 10.3.2018 [cit. 11.4.2018]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Rhind\\_Mathematical\\_Papyrus#Pyramids](https://en.wikipedia.org/wiki/Rhind_Mathematical_Papyrus#Pyramids)
- [41] ROONEY, Anne. *Průběh matematiky*. Překlad Renata Štulcová. Praha: Dobrovský, 2017. ISBN 978-80-7390-579-8.
- [42] SEDLÁČEK, Jiří et al. *Slovník školské matematiky*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1981.
- [43] SEKANINA, Milan et al. *Geometrie II*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988.
- [44] Simon Antoine Jean L'Huilier. In: *Wikipedie: Otevřená encyklopedie* [online]. 5.4.2017 [cit. 16.4.2018]. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Simon\\_Antoine\\_Jean\\_L%27Huilier](https://cs.wikipedia.org/wiki/Simon_Antoine_Jean_L%27Huilier)
- [45] SLÁMA, Michal. *Pythagorejské trojúhelníky*. Praha, 2015, 65 stran. Dostupné z: [https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/72716/BPTX\\_2014\\_2\\_11410\\_0\\_320762\\_0\\_164175.pdf?sequence=1](https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/72716/BPTX_2014_2_11410_0_320762_0_164175.pdf?sequence=1). Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- [46] SOVIČ, Pavel. *Podnětná výuka obsahu trojúhelníku a rovnoběžníku ve dvou třídách s odlišnou zkušeností s výukou matematiky*. Praha, 2016, 120 stran. Dostupné z: <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/120238855/?lang=cs>. Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- [47] STEHLÍKOVÁ, Naďa et al. *Úvod do studia analytické geometrie*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, 2005. ISBN 80-7290-188-5.
- [48] SVAČINA, Ondřej. *Planimetrie: trojúhelník* [online]. ©2009-2012 [cit. 10.4.2018]. Dostupné z: <http://planimetrie.chytrak.cz/index.php?stranka=trojuhelnik>
- [49] ŠEDIVÝ, Jaroslav et al. *Antologie matematických didaktických textů: Období 1360 - 1860*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1987.

- [50] Trojúhelník. *Matematika pro střední a základní školy - Matematika.cz* [online]. Brno: Nová média, ©2006-2014 [cit. 10.4.2018]. Dostupné z: <https://matematika.cz/popis-trojuhelniku>
- [51] Tvar zemského tělesa a referenční plochy. *Souřadnicové systémy* [online]. [cit. 13.4.2018]. Dostupné z: <http://gis.zcu.cz/studium/gen1/html/ch02s03.html>
- [52] Vektorový součin. *Matematika pro střední a základní školy - Matematika.cz* [online]. Brno: Nová média, ©2006-2014 [cit. 10.4.2018]. Dostupné z: <https://matematika.cz/vektorovy-soucin>
- [53] Výpočet plochy ze souřadnic. *Geodézie pro stavební obory: Výpočty* [online]. [cit. 11.4.2018]. Dostupné z: <https://www.fce.vutbr.cz/ged/stavari/vypocty/plochy.html>
- [54] WIĘŚŁAW, Witold. Geometry in Poland in XV - XVIII Centuries. In: FUCHS, Eduard (ed.). *Mathematics Throughout the Ages*. Praha: Prometheus, 2001, s. 51-66. Edice Dějiny matematiky, 17. svazek. ISBN 80-7196-219-8.
- [55] Zpracování výsledků měření polohopisu. *Určování výměr* [online]. [cit. 11.4.2018]. Dostupné z: <http://gis.zcu.cz/studium/gen1/html/ch09s05.html>

# Seznam obrázků

2.1	Definice vektorů $\vec{p}$ a $\vec{q}$ a hledání jejich souřadnic . . . . .	13
2.2	Pythagorova věta pro velikost vektoru . . . . .	14
2.3	Výpočet pomocí určitého integrálu . . . . .	16
3.1	Základy - postulát XXXV. . . . .	20
3.2	Základy - postulát XXXVII. . . . .	21
3.3	Základy - postulát XLI. . . . .	22
3.4	Postup při určování hodnoty $\pi$ . . . . .	22
4.1	Ukázka určování počtu čtverců . . . . .	28
4.2	Počet čtverců - práce s necelou částí . . . . .	29
4.3	Rozříznutí trojúhelníku na dva menší . . . . .	29
4.4	Složení trojúhelníku do jednoho jednotkového čtverce . . . . .	30
4.5	Náznak doplnění trojúhelníku na obdélník . . . . .	30
4.6	Metoda rámování . . . . .	30
4.7	Zadání pro odvození Pickovy formule . . . . .	31
4.8	Důkaz Pickovy formule pro pravoúhlý $\Delta$ . . . . .	33
4.9	Mnohoúhelníky $M'$ a $M''$ pro důkaz vlastnosti aditivity . . . . .	33
4.10	Dělení neelementárních trojúhelníků . . . . .	34
4.11	Odvození Pickovy formule pro elementární trojúhelník . . . . .	35
4.12	Znázornění čtyřúhelníku $ADBC$ . . . . .	35
4.13	Rozdělení čtyřúhelníku na dva $\Delta$ a obdélník . . . . .	35
4.14	Doplnění pravoúhlého trojúhelníku na obdélník . . . . .	36
4.15	Doplnění obecného trojúhelníku na rovnoběžník . . . . .	36
4.16	Rovnoběžník převedený na obdélník - pomocný výpočet . . . . .	36
4.17	Důkaz pomocí středních příček . . . . .	37
4.18	Odvození výpočtu pomocí funkce $\sin$ . . . . .	37
4.19	Označení pro důkaz Heronova vzorce . . . . .	38
4.20	Postup výpočtu pomocí $\rho$ . . . . .	40
4.21	$\Delta$ připravený pro užití l'Huillierových vzorců . . . . .	42
4.22	Důkaz pomocí metody rámování . . . . .	43
4.23	Užití vektorového součinu pro výpočet $S_{\Delta}$ . . . . .	45
5.1	$\Delta ABC$ zvolený pro demonstraci jednotlivých metod . . . . .	47
5.2	Rozdělení na dva pravoúhlé trojúhelníky, $APC$ a $PBC$ . . . . .	47
5.3	Obsah trojúhelníku $APC$ . . . . .	48
5.4	Obsah trojúhelníku $PBC$ . . . . .	48
5.5	Trojúhelník $ABC$ orámovaný obdélníkem $ABDE$ . . . . .	48
5.6	Vnitřní a hraniční mřížové body . . . . .	49
5.7	Základní vzorec - strana x výška . . . . .	49

5.8	Výpočet pomocí funkce sinus . . . . .	50
5.9	Kružnice vepsaná trojúhelníku . . . . .	52
5.10	Aplikace l'Huillierových vzorců . . . . .	53
5.11	Určení souřadnic pomocí rovnoběžek s osami . . . . .	54
5.12	Vektory pro výpočet obsahu . . . . .	54
5.13	Přímky obsahující strany $\triangle ABC$ . . . . .	55
5.14	Označení jednotlivých útvarů . . . . .	55



# Seznam tabulek

4.1	Hodnoty z obrázku 4.7 . . . . .	31
4.2	Hodnoty - fixace $H = 3$ . . . . .	32
4.3	Hodnoty - fixace $V = 0$ . . . . .	32